

1919.

No. 18.

45

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 60. Heft 2.

DER GANZEN REIHE 365. BANDES 2. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE

W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRHENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 66 M.

Ausgegeben am 7. Oktober 1919.

Inhalt.

	Seite
1. Emil Beck. Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.	109
2. Joseph Würschmidt. Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen	149
3. Robert Fellingner. Über die Dielektrizitätskonstante einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine (mit einem Anhang über Bernstein)	181
4. J. Stark. Der spektrale Nachweis elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome	196

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zelehnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme; von Emil Beck.

Einleitung.

Im Jahre 1915 haben A. Einstein und W. J. de Haas eine Arbeit „Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme“¹⁾ veröffentlicht, in welcher sie mit Hilfe einer sehr eleganten Methode die Hypothese von Ampère über die Natur des Magnetismus experimentell bestätigen.

Nach dieser Hypothese werden die magnetischen Erscheinungen hervorgerufen durch elektrische Ströme, welche die Moleküle der magnetisierbaren Körper umkreisen, indem die Anordnung der Ebenen dieser Strombahnen den Grad der Magnetisierung bestimmt. Ist der Körper in unmagnetischem Zustand, so sind danach jene Strombahnebenen regellos gerichtet, während bei einem bis zur Sättigung magnetisierten Körper alle gleichgerichtet sind, nämlich senkrecht zur Magnetisierungsrichtung. Da nun nach den modernen Anschauungen die um die Moleküle kreisenden elektrischen Teilchen an träge Masse gebunden sind, so kann man jedes Molekül eines magnetisierbaren Körpers als Kreisel auffassen, der die bekannten Kreiseigenschaften zeigen muß. Das Impulsmoment solch eines Moleküls ist $J = \left(2 \frac{m}{e}\right) \cdot M = \lambda M$, wenn man annimmt, daß nur *negative* Teilchen, Elektronen, kreisen mit der Ladung e und der Masse m und wenn M das Moment des Molekularmagneten bedeutet. Jede Magnetisierungsänderung des Körpers muß, weil sie die Rotationsachsenrichtung der Kreisel und damit das innere Impulsmoment derselben ändert, ein grobmechanisches Impulsmoment am Körper zur Folge haben nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmoments. Das dabei entstehende Drehmoment ist gegeben durch die Vektorgleichung:

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 17. S. 152—170. 1915.

$$(1) \quad D = \left(2 \frac{m}{e}\right) \frac{dI}{dt} = \lambda \frac{dI}{dt},$$

wo I die Magnetisierungsintensität bedeutet. Nach dem in einer späteren Arbeit von W. J. de Haas gemachten Vorschlage sei der hier auftretende Effekt als „Einstein-Effekt“ bezeichnet. Die Arbeit von Einstein und de Haas, die den Effekt nachgewiesen hat, möge in folgendem zur Abkürzung stets mit E bezeichnet werden.

Setzt man speziell ein um seine Längsachse drehbares Eisenstäbchen voraus, das durch ein starkes axial gerichtetes Magnetfeld bis zur Sättigung magnetisiert ist, und ändert man plötzlich die Feldrichtung, so wird während dieser Änderung auf das Stäbchen ein axialer Impuls ausgeübt, der dasselbe in Schwingungen um seine Achse versetzen wird. Nach Gleichung (1) ist dieser Impuls:

$$(2) \quad J = 2 \lambda I.$$

In E wurde ein an einem Glasfaden aufgehängtes dünnes Eisenstäbchen axial in eine lotrecht gestellte Spule gebracht, die ein starkes Magnetfeld lieferte. Wie die Verfasser berechneten, hätte die plötzliche Richtungsänderung des Gleichstroms, der das Feld erzeugte, eine meßbare Drehbewegung des Stäbchens hervorrufen müssen. Dabei traten aber so große störende Einflüsse auf, daß die zu beobachtende Bewegung ganz verdeckt wurde. Da kamen die Verfasser auf die ausgezeichnete Idee, diese störenden Einflüsse durch Anwendung eines schnell ändernden Feldes, wie es von einem Wechselstrom gewöhnlicher Frequenz geliefert wird, zu beseitigen und den Effekt dadurch zu multiplizieren. Letzteres wurde dadurch erreicht, daß man die Länge des Aufhängefadens des Stäbchens so wählte, daß die Eigenfrequenz des Stäbchens mit der Frequenz des Wechselstroms, also des Wechselfeldes, übereinstimmte. Es trat Resonanz ein, und aus der Resonanzamplitude der erzwungenen Schwingung ließ sich die Größe des Einstein-Effekts berechnen. Zum Verständnis des Spätern ist es notwendig, die Theorie hier kurz zu wiederholen; für die Einzelheiten verweise ich auf E .

Der Wechselstrom und damit das Wechselfeld sei gegeben durch:

$$i = A \sin \omega t,$$

dann läßt sich das nach Gleichung (1) bestimmte Drehmoment in eine Fourierreihe entwickeln:

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos n \omega t,$$

und die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung wird:

$$Q \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + P \frac{d \alpha}{dt} + \Theta \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos n \omega t,$$

wo Q das Trägheitsmoment des Stäbchens, P eine Dämpfungskonstante, Θ die Torsionskonstante der Aufhängung und α den Drehwinkel der Schwingung bedeutet. Vom Drehmoment D ist aber bloß das erste Glied $B_1 \cdot \cos \omega t$ in Betracht zu ziehen weil nur der ihm entsprechende Effekt durch Resonanz multipliziert wird. Ist nun das Wechselfeld recht stark, so wird das zu untersuchende Stäbchen stark gesättigt und Feldstärke und Drehmoment werden zeitlich sich so ändern, wie Figg. 5 und 6, S. 142 angeben. Für den idealen Fall eines unendlich starken Feldes und der Abwesenheit von Hysteresis, wo also das Drehmoment von 0 verschieden ist nur in den Momenten, da das Feld durch 0 hindurchgeht, wollen wir D mit $\cos \omega t$ multiplizieren und über eine ganze Periode $T = 2\pi/\omega$ integrieren:

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{+\frac{\pi}{2\omega}} D \cdot \cos \omega t \cdot dt = \int D \cdot dt = \int B_1 \cos^2 \omega t \cdot dt$$

oder nach (1):

$$4\lambda I = \frac{\pi}{\omega} B_1,$$

also:

$$B_1 = \frac{4\lambda\omega}{\pi} \cdot I,$$

wo I die der maximalen Feldstärke entsprechende Magnetisierungsintensität bedeutet. Die periodische Lösung der Gleichung

$$(3) \quad Q \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + P \frac{d \alpha}{dt} + \Theta \cdot \alpha = B_1 \cos \omega t$$

wird nun:

$$\alpha = \frac{B_1}{P \cdot \omega} \cdot \sin \omega t,$$

da es sich hier um sehr kleine Dämpfung handelt. Daraus ergibt sich die Amplitude der Resonanzschwingung zu:

$$\alpha_m = \frac{4\lambda I}{\pi P}$$

und hieraus:

$$(4) \quad \lambda = \frac{\pi \cdot P \cdot \alpha_m}{4 I}$$

Um eine direkte Bestimmung von P zu vermeiden, haben nun die Verfasser folgendes geistreiche Verfahren angewendet. Sie haben nicht nur das Resonanzmaximum gemessen, sondern die ganze Resonanzkurve aufgenommen, welche die Amplitude der Schwingungen in Funktion der Frequenz des Wechselfeldes darstellt, wenn man diese in nächster Nähe der Eigenfrequenz des Stäbchens variieren läßt — durch kleine Änderungen der Tourenzahl der Wechselstrommaschine. Wie ihre Berechnung zeigt, gestattet dann diese Kurve zunächst eine Prüfung, ob die Größe P wirklich konstant ist, indem nämlich in diesem Falle die Größe

$$v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$$

für alle Punkte der Kurve konstant sein muß, wenn v die jeweilige Differenz der Feldfrequenz gegenüber der Resonanzfrequenz und $b = \alpha/\alpha_m$, d. h. das Verhältnis der jeweiligen Amplitude zur Resonanzamplitude des Stäbchens bedeutet. Dann aber ergibt sich für die Resonanzamplitude:

$$\alpha_m = \frac{\lambda I}{\pi^2 Q v \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}}$$

$$\text{oder: (5)} \quad \lambda = \frac{\pi^2 Q \alpha_m}{I} \cdot v \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$$

Bei ihren Messungen finden die Verfasser eine überraschend gute Übereinstimmung mit Formel (5), indem $\lambda = 1,11 \cdot 10^{-7}$ wird, während es genau $1,13 \cdot 10^{-7}$ sein sollte, wenn man für e/m den zuverlässigsten Wert $1,765 \cdot 10^7$ elektromagnetische Einheiten nimmt. Wie in *E* bemerkt wird, beruht die Güte der Übereinstimmung wohl auf Zufall, indem bei der Meßmethode mit einer Unsicherheit von 10% zu rechnen ist; doch stellen die Messungen eine glänzende Bestätigung des vorausgesagten Effekts dar.

Die Arbeit der Verfasser mußte ziemlich plötzlich abgebrochen werden, sodaß auch ein Teil der Untersuchung, der

nicht einwandfrei ausgeführt wurde, nicht mehr richtig gestellt werden konnte, nämlich die Bestimmung des Vorzeichens der kreisenden Elektronen (vgl. dazu die Berichtigung von Einstein).¹⁾ Nach Ansicht der Verfasser ließe sich die Methode sehr wohl zu einer genauen Bestimmung der wichtigen Größe e/m ausbauen.

Besonders letzterer Umstand veranlaßte mich nun, die Messungen von mir aus nach derselben Methode zu wiederholen, um über den zu erlangenden Grad der Genauigkeit Aufschluß zu erhalten und darauf bedacht zu sein, diesen Genauigkeitsgrad zu erhöhen durch einige Abänderungen in der Ausführung der Messungen. Auch ich wollte mein Hauptaugenmerk auf die Eliminierung der störenden Effekte richten, und dann sollte auch der nicht einwandfreie Teil der Messungen in E (Vorzeichenbestimmung) durch andere Messungen richtig ausgeführt werden. Damit ist der Zweck der vorliegenden Arbeit gekennzeichnet.

Abänderungen gegenüber den Meßanordnungen in E .

Die Meßanordnungen von E setze ich als bekannt voraus und will nun beschreiben, welche Abänderungen ich in der Ausführung der Messungen gegenüber jener Arbeit vorgenommen habe.

Die Aufnahme der Resonanzkurve: So geistreich auch das Verfahren in E ist, durch Aufnahme der Resonanzkurve die direkte Bestimmung der Dämpfung P überflüssig zu machen, so liegt gerade darin die Hauptschwierigkeit der ganzen Methode, diese Kurve einigermaßen genau zu erhalten. In E wurden die Änderungen in der Frequenz hervorgerufen durch Variieren eines parallel zur Erregerwicklung der das Wechselfeld erzeugenden Wechselstrommaschine geschalteten Widerstandes und gemessen an einem in Serie mit jenem Widerstand geschalteten Ampèremeter, das mit einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser in bezug auf gewisse exakt zu konstatierende Frequenzwerte (45; 45,5; 46; 46,5;; 55) geeicht war, während die übrigen Frequenzwerte dann mit dem Ampèremeter interpoliert wurden. Dabei war natürlich vorausgesetzt,

1) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 17. S. 203. 1915.

daß während der ganzen Kurvenaufnahme alle übrigen Verhältnisse an der Maschine gleich geblieben waren, daß also keine anderen Frequenzänderungen als die durch die Widerstandsänderungen hervorgerufenen vorkamen. Wenn man nun beachtet (vgl. S. 133), um welche kleine Frequenzänderungen es sich überhaupt innerhalb der Kurve handelt, so wird man in der Unmöglichkeit der genauen Erreichung jener Bedingung eine ziemlich große Fehlerquelle erblicken müssen. Außerdem ist ein gewöhnlicher Frequenzmesser ein viel zu rohes Instrument zur Bestimmung so kleiner Frequenzdifferenzen, wie sie hier vorkamen.

Es war also geboten, die Frequenzdifferenzen genauer zu messen und sich von den willkürlichen Schwankungen der Tourenzahl der Maschine möglichst unabhängig zu machen. Dazu wurde ein neuer *Frequenzmesser* konstruiert, der die kleinen Frequenzänderungen *direkt* zu messen gestattete. Sein Prinzip beruhte darauf, daß das Magnetfeld des das Wechselfeld erzeugenden Wechselstroms an einem ausgespannten Draht Torsionsschwingungen erregte, deren Resonanz mit dem Wechselstrom durch Einstellen auf bestimmte Drahtlänge aufgesucht wurde. Jeder Frequenzänderung des Wechselstroms entsprach eine Änderung der wirksamen Drahtlänge, welche Änderung mit Hilfe einer Mikrometerschraube genau gemessen werden konnte und die Frequenzänderung zu berechnen gestattete. Im folgenden soll der Apparat genau beschrieben werden.

Ein Zylinder aus Knochen wurde auf eine Länge von 32 mm und eine Dicke von 8,1 mm genau abgedreht und in der Mitte desselben senkrecht zur Zylinderachse durchgebohrtes Löchlein von 0,5 mm Weite ein magnetisiertes Stahldrahtstückchen genau eingepaßt. Auf der Mantelfläche wurde in der Zylindermitte ein kleines Planspiegelchen befestigt. An den Enden des Zylinders wurden Neusilberdrähte von 0,19 mm Dicke in Bohrlöcher eingelassen und mit Siegelack befestigt. Diese Einrichtung wurde dann an einem lotrecht gestellten Holzgestell parallel zu diesem montiert, indem das eine Ende des Drahtes mit einer Klemmvorrichtung fest fixiert war, während das andere Ende an einer Messingspiralfeder befestigt war, die den Draht stets gespannt hielt. Auf einem am Holz-

gestell befestigten Schlitten war längs des Drahtes mit Hilfe einer Mikrometerschraube eine Klemmvorrichtung verschiebbar, die den Draht an genau definierter Stelle einklemmen konnte und dadurch die Länge des schwingenden Drahtes bestimmte. Die Klemmvorrichtung bestand aus zwei parallelen Stahllamellen, die auf den einander zugekehrten Seiten an den Enden zwei Elfenbeinbacken trugen, die mit einer Fläche von 4×3 mm durch die federnden Stahllamellen aufeinander gepreßt wurden oder mit Hilfe eines Sperrschraubchens voneinander getrennt werden konnten. Zwischen diesen Backen war der Draht eingeklemmt. In der Höhe des Knochenzylinders war am Holzgestell eine Kupferdrahtwindungsgruppe befestigt, deren Ebene parallel der Richtung des Meßdrahts gestellt wurde und demselben mehr oder weniger genähert werden konnte. Mit Hilfe einer Torsionsschraube am festen Ende des Meßdrahtes konnte das kleine Magnetchen im Knochenzylinder parallel zur Ebene der Windungen gestellt werden. Die Windungsgruppe war in Serie mit den Feldspulen geschaltet, so daß der sie durchfließende Wechselstrom ein senkrecht zur Windungsebene gerichtetes Wechseldrehmoment auf das Magnetchen ausübte und den Meßdraht in Torsionsschwingungen versetzte. Stimmte die Frequenz des Stromes mit der Eigenfrequenz des Meßdrahtes überein, so trat Resonanz ein, und auf das Resonanzmaximum wurde nun bei jeder in Frage kommenden Frequenz des Wechselstroms die Meßdrahtlänge mit Hilfe der Mikrometerschraube eingestellt. Betrug hierbei die Länge des einen Meßdrahtteiles (vom festen Ende bis zum Knochenzylinder) l_1 , die des andern (vom Knochenzylinder bis zur Einklemmstelle) l_2 , so war die Eigenfrequenz, also auch die Frequenz des Wechsel-

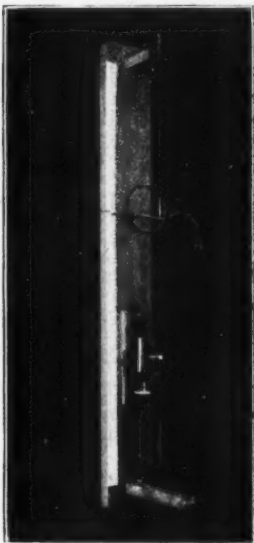


Fig. 1.

stroms und Wechselfeldes, proportional zu $\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}}$ (wie sich ergibt aus den Torsionsgesetzen, aufgestellt für beide Drahtteile), und wenn nun für eine Einstellung (l_1, l_2) die Frequenz an einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser abgelesen wurde, so konnte sie für jede andere Einstellung l_1', l_2' leicht berechnet werden.

Sollte dieser Apparat zur genauen Messung von Frequenzdifferenzen geeignet sein, so mußten folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Meßdraht mußte sehr genau überall gleichen Querschnitt haben. Nachdem zuerst verschiedene andere Drähte in dieser Beziehung untersucht worden waren, die kein günstiges Resultat lieferten, zeigte sich diese Bedingung bei dem benutzten Neusilberdraht ausgezeichnet erfüllt. Er wurde auf seinen elektrischen Widerstand hin untersucht und zeigte von 5 zu 5 cm seiner Länge Unterschiede im Widerstand, die bloß innerhalb der Genauigkeit der angewandten Methode lagen (Messung von Spannung mit Galvanometer). Auch wurde eine Eichung meines Frequenzmessers mit einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser ausgeführt, indem z. B. für die beiden an letzterem abgelesenen Frequenzen 50 und 45 die Einstellungen an meinem Apparat gemacht wurden. Hier war dann die Bedingung der Proportionalität mit $\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}}$ ausgezeichnet erfüllt.
2. Es mußte die Einklemmstelle sehr genau definiert sein. Dazu waren die pressenden Flächen der Elfenbeinbacken exakt eben gefeilt, und die Begrenzungskanten paßten genau aufeinander. Auch änderten Manipulationen am Sperrschraubchen gar nichts an der Stabilität der ganzen Einrichtung. Elfenbein wurde für die Backen benutzt, weil dies ein recht weiches und elastisches Material ist und den Torsionsdraht in keiner Weise beschädigen konnte.
3. Es mußte der Resonanzbereich der Torsionsschwingungen des Drahtes möglichst klein und die Resonanzamplitude möglichst groß sein, d. h. der Widerstandskoeffizient der Schwingungen möglichst klein. Das wurde erreicht durch elektrisches Ausglühen des Drahtes, wodurch er ganz weich wurde und schön geradlinig gespannt werden konnte, ferner durch gute Zentrierung

beim Einlassen der Drähte in den Knochenzylinder und endlich durch die Wahl von Neusilber, das sehr kleine innere Reibung hat. Wie gering die Dämpfung war, kann man ersehen aus der Angabe, daß es beim freien Ausschwingenlassen 10 Sek. brauchte, bis die Amplitude auf die Hälfte sich reduzierte.

Das Trägheitsmoment des Knochenzylinders war so gewählt worden, daß bei einer wirksamen Drahtlänge von ca. 50 cm die Eigenfrequenz des Drahtes ca. 50 betrug, also gleich der üblichen Wechselstromfrequenz war.

Das schwingende Stäbchen. Es wurden mit zwei Arten von Eisenstäbchen Versuche angestellt und ferner mit einem Nickelstäbchen. Zunächst wurde ein aus einem Stück weichen Eisens bestehendes Stäbchen von 20 cm Länge und 2 mm Dicke benutzt, das zuerst nochmals stark ausgeglüht und dann möglichst genau geradlinig gerichtet wurde. Ferner ein aus einem Stäbchenbündel bestehendes Stäbchen von ungefähr den gleichen Dimensionen. Es war ja nicht ausgeschlossen, daß die durch das Wechselfeld erzeugten Wirbelströme störende Einflüsse auf die Schwingungen des Stäbchens ausüben könnten, und diese sollten durch Benutzung der zweiten Art Stäbchen möglichst ausgeschaltet werden. Sieben* weiche Eisendrahtstücke von 20 cm Länge und 0,7 mm Dicke wurden, nachdem sie ausgeglüht und sehr sorgfältig geradlinig gerichtet worden, mit Hilfe von Schellack zu einem Bündel vereinigt, so daß sechs derselben sich im Kreise um das siebente gruppierten und jedes der sechs seine beiden Nachbarn im Kreise und das siebente *berührte*. Die erste Befürchtung, ein solches Bündel könnte wohl nicht genügend genau zentriert hergestellt werden, erfüllte sich dank der überaus sorgfältigen Arbeit des Mechanikers gar nicht. Das 3. Stäbchen, aus Nickel, bestand aus einem Stück und hatte die gleichen Dimensionen, wie das aus einem Stück bestehende Eisenstäbchen.

Die *Montierung* der Stäbchen geschah auch auf zwei verschiedene Arten, entweder durch Aufhängung oder durch Einspannung. Im ersten Falle wurde ein Metalldrahtstück von 0,2 mm Stärke (Neusilber oder Kupfer), das vorher durch Ausglühen weich gemacht worden war, — nur dadurch konnte gute axiale Aufhängung erlangt werden — möglichst zentrisch am einen Ende des Stäbchens eingelötet und dieser Aufhänge-

draht mit Hilfe einer Klemme an einem langen Glasstab befestigt, der dann lotrecht in die Achsenrichtung der Feldspulen zu stehen kam. Im andern Falle wurde das Stäbchen längs dieses Glasstabes *eingespannt*, d. h. an *beiden* Enden des Stäbchens wurden Drahtstücke eingelötet, das eine, obere, Stück wie vorhin am Stab eingeklemmt, das andere dagegen an eine federnde Messinglamelle angelötet, die ebenfalls mit einer Klemme am Glasstab befestigt war und das Stäbchen schwach in Spannung hielt. Neusilber wurde für die Aufhängung benutzt, weil dieses besonders kleine innere Reibung hat. In der Mitte des Stäbchens war ein genau planes Spiegelchen zur Beobachtung der Schwingungen befestigt.

Die Einspannung des Stäbchens hatte gegenüber der Aufhängung den Vorteil, daß das ganze System viel stabiler und die Widerstandskonstante der Torsionsschwingungen des Stäbchens kleiner war, weil der Draht durch die Spannung stets ganz geradlinig gehalten wurde. Aus diesen Gründen wurde diese Art Befestigung gewählt. Doch zeigten die Messungen auch einen Nachteil, indem hier der Einfluß des nicht kompensierten Erdfeldes viel größer war als bei aufgehängtem Stäbchen. Vor allem aber wurde die Einspannung deshalb benutzt, um die Dämpfungskonstante P direkt ermitteln zu können.

Die geringe Größe von P im Falle der Einspannung hatte eine recht große Resonanzamplitude des Stäbchens zur Folge, bewirkte aber andererseits, daß der Resonanzbereich recht klein wurde, wodurch die Genauigkeit beeinträchtigt worden wäre. Es wurde daher durch Anbringung von ein oder zwei Papierflügeln am Stäbchen dafür gesorgt, daß zur inneren Reibung des Befestigungsdrahtes ein Luftwiderstand hinzukam. Durch passende Wahl der Flügelgröße konnte dann die gewünschte Amplitudengröße erreicht werden.

Direkte Bestimmung des Dämpfungsfaktors. Neben der Methode, die Resonanzkurve aufzunehmen, wurde die Dämpfung P auch direkt bestimmt, um dann λ nach Formel (4) zu berechnen. Diese Bestimmung beruhte darauf, daß man das Stäbchen nach Ausschaltung des Wechselfeldes ausschwingen ließ und das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung ermittelte. Dies war nur möglich bei *eingespanntem* Stäbchen,

da hier bei Entfernen des Feldes das Stäbchen keine anderen Bewegungen als Torsionsschwingungen ausführte. Das logarithmische Dekrement wurde bestimmt durch photographische Aufnahme der Schwingungen. Um eine Trommel von 30 cm Durchmesser wurde ein Streifen sehr empfindlichen Films gelegt und die Trommel gegen Lichteinflüsse geschützt durch eine Kartonhülle, die das von einer Halbwattlampe ausgehende, am Spiegel des Stäbchens reflektierte Licht durch einen horizontalen, 1 mm breiten Schlitz auf den Film fallen ließ. Ließ man nun die Trommel *langsam* um eine horizontale Achse rotieren, so bildeten sich auf dem Film die Schwingungen als ganz spitze Sinuskurven ab. Sind α_1 und α_2 irgend zwei direkt aufeinander folgende *gleichgerichtete* Amplituden, u_1 und u_2 die dazu gehörenden Lichtbandbreiten auf dem Film, so ist das logarithmische Dekrement:

$$d = \log \operatorname{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \log \operatorname{nat} \frac{u_1}{u_2}$$

Aus der Bewegungsgleichung des Stäbchens folgt dann:

$$P = 2 Q d n,$$

wo n die Anzahl der großen Schwingungen pro Sekunde bedeutet.

Trotz der für photographische Aufnahmen großen Frequenz der Schwingungen war der Lichteindruck auf dem Film genügend stark, da die 50 Kerzen repräsentierende Lichtquelle auf ein bloß 5 mm langes und 0,2 mm breites Metallspirälchen der Halbwattlampe konzentriert war.

Wenn sich auch die Dämpfung auf diese Weise recht genau bestimmen läßt, so ist zu beachten, daß man hier den Wert von P bei *ausgeschaltetem* Wechselfeld erhält. Wie aber die Resultate zeigen werden, ist das unwesentlich.

Bestimmung des Vorzeichens der kreisenden Elektronen. Diese Bestimmung geschah auf Grund folgender Überlegungen¹⁾: Ist die Stromstärke, die das Wechselfeld erzeugt, gegeben durch:

$$(6) \quad i = A \sin \omega t,$$

so ist die Feldstärke mit ihr in gleicher Phase:

$$H = A' \sin \omega t,$$

1) Vgl. die Fassung von E in den Berichten der Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, XVIII S. 696—711. 1915.

also auch die Magnetisierung:

$$I = A'' \cdot \sin \omega t,$$

wenn man von der kleinen Phasenverschiebung wegen Hysteresis absieht. Da nun der Einsteineffekt, bestehend in dem durch den Magnetisierungswechsel entstehenden Drehmoment, gegeben ist durch:

$$D = -\lambda \frac{dI}{dt},$$

also im Falle, daß es sich um *negative* Elektronen handelt, durch:

$$D = \lambda \frac{dI}{dt},$$

so wird:

$$D = B_1 \cos \omega t,$$

d. h. das Drehmoment eilt dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Für den Winkel α des schwingenden Stäbchens ergibt sich aus der Differentialgleichung (3), in welcher natürlich der Winkel im gleichen Sinne positiv gezählt wird, wie das Drehmoment und wie der Strom in den Feldspulen, als Lösung:

$$\alpha = C \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

wo die Amplitude bestimmt ist nach:

$$C = \frac{B_1}{\sqrt{Q^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + P^2\omega^2}}$$

und die Phasendifferenz nach:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{P \cdot \omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

wo ω_0 die Frequenz der Eigenschwingung des Stäbchens ist. Resonanz tritt ein, wenn:

$$Q^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + P^2\omega^2$$

ein Minimum ist, d. h. wenn:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{P^2}{2Q^2}.$$

Da nun P eine sehr kleine Größe ist, wird die Resonanzfrequenz fast genau gleich der Eigenfrequenz, $\omega_r = \omega_0$. In diesem Falle wird also:

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty; \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

also wird bei *Resonanz*:

$$(8) \quad \alpha = C' \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = C' \cdot \sin \omega t.$$

Die Schwingungen haben danach im Falle der Resonanz dieselbe Phase wie der Strom — abgesehen von einer kleinen durch Hysteresis verursachten Phasendifferenz.

Würde es sich dagegen um Rotation positiver elektrischer Teilchen handeln, so hätte die Amplitude von D das entgegengesetzte Vorzeichen, also auch B_1 , und auch C' , d. h. zwischen Stäbchenschwingung und Strom würde eine Phasendifferenz von einer halben Periode bestehen.

Aus Gleichung (7) folgt, daß wegen der Kleinheit von P schon bei kleiner Abweichung der aufgezwungenen Frequenz von der Eigenfrequenz $\tan \varphi$ stark abnimmt und recht bald praktisch Null werden kann, also $\varphi = 0$ wird, d. h. zwischen Stäbchenschwingung und Strom würde dann eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode bestehen.

Die experimentelle Prüfung dieser theoretischen Überlegung geschah nun in folgender Weise:

Parallel zu einem induktionsfreien Widerstand, der in den das Wechselfeld erzeugenden Stromkreis geschaltet war, wurde eine Oszillographenmeßschleife von Siemens & Halske geschaltet, die lotrecht in ein horizontales Magnetfeld zu stehen kam. Der sie durchfließende Wechselstrom hatte dann die gleiche Phase wie der Wechselstrom in den Feldspulen, weil die Meßschleife als praktisch induktionslos angesehen werden kann. Es wurde nun eine Vorrichtung getroffen, um die Schwingungen des Stäbchens und die der Meßschleife gleichzeitig auf demselben Film zu photographieren, unmittelbar nachdem die Schwingungen des Stäbchens auf Resonanz eingestellt worden waren. Es geschah dies ganz ähnlich wie bei der Bestimmung des logarithmischen Dekrementes des aus-schwingenden Stäbchens (vgl. S. 119) unter Benutzung derselben rotierenden Trommel und derselben Schutzhülle mit dem horizontalen Schlitz. Durch denselben Schlitz hindurch bildeten sich beide Schwingungen nebeneinander auf dem Film ab. Der photographischen Aufnahme vorausgehend wurde die Schaltung der Meßschleife so gewählt, daß, wenn der Strom in den Feldspulen von oben betrachtet mit dem Uhrzeiger lief, an der Meßschleife ein Drehmoment entstand, das ebenfalls, von oben betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers gerichtet war und auf dem Film eine Verschiebung der Lichtflecke nach rechts

bewirkte. Dies konnte leicht mit Gleichstrom ausprobiert werden.

Handelt es sich nun um negative Elektronen, so mußte — nach dem, was über positive Richtung von α und i gesagt worden — die Verdrehung des Eisenstäbchens von oben betrachtet mit dem Uhrzeiger erfolgen und also der Lichtfleck ebenfalls nach rechts verschoben werden, solange der Feldspulenstrom, von oben betrachtet, mit dem Uhrzeiger lief. Auf dem Film mußten also nach Gleichung (6) und (8) beide Schwingungskurven *parallel* zueinander verlaufen. Dies ist nun durch die photographische Aufnahme gefunden worden, und zwar zeigte sich keinerlei Phasenverschiebung zwischen beiden Kurven, die von Hysteresis herrühren könnte. Vielleicht wurde eine solche auch verdeckt durch eine entgegengesetzte Verschiebung, die von nicht ganz zu vermeidenden Selbstinduktionen herrühren konnte.

Die weiteren Versuchsanordnungen.

Es sollen jetzt noch die übrigen Teile der Versuchsanordnung beschrieben werden.

a) *Das Wechselfeld.* Weil auch Versuche mit eingespanntem (nicht bloß aufgehängtem) Stäbchen im Plan der Arbeit waren, mußte das Wechselfeld durch zwei getrennte Spulen hergestellt werden, denn das Planspiegelchen, das zur Beobachtung der Schwingungen diente; mußte am Stäbchen selber angebracht werden können, statt, wie in *E*, an einem Röhrchenansatz. Für die gute Zentrierung war das sowieso viel günstiger. Es wurden zwei genau gleich große Spulen aus Hartholz hergestellt von je 30 cm Länge und auf diese isolierter Kupferdraht von 1,5 mm Dicke in 12 Lagen gewickelt, so daß auf 1 Lage jeder Spule 160 Windungen kamen. Die innerste Lage hatte einen Durchmesser von 5 cm, die äußerste einen von 10 cm. Die Spulen konnten genau coaxial gestellt werden und waren durch 3 gleich dicke Holzklötzchen nur um 1 cm voneinander entfernt; die einander zugekehrten Holzflanschen der Spulen hatten eine Dicke von bloß 5 mm. Die Windungen der Spulen waren hintereinander geschaltet. Die ganze Kombination kam auf eine Unterlage zu stehen, die ihrerseits mit verstellbaren Fußschrauben auf einem Brett ruhte, das mit

Holzrollen auf einem festen Tisch verschiebbar war. Das magnetische Feld, das durch den Wechselstrom in den Spulen erzeugt wurde, war — wie untersucht wurde — natürlich nicht genau homogen, sondern gegen die Lücke zwischen den Spulen hin kleiner als gegen die Mitte jeder einzelnen Spule. Das hat aber wohl nichts zu sagen, da bei unseren Versuchen mit hohen Sättigungsmagnetisierungen gearbeitet wurde. Nach der ballistischen Methode ergab sich im Spulenpaar im Bereich von je 10 cm von der Mitte aus — das entspricht der Stäbchenlänge von 20 cm — eine mittlere Feldstärke von 72 Gauss bei einer Stromstärke von 1 Amp. Die bei den Messungen meistens verwendete Wechselstromstärke betrug ca. 3 A. eff., dies entspricht einer Amplitude von 4,2 A., also einer Feldstärke von der Amplitude 300 Gauss. Ich ging dagegen auch bis zu Stromstärken von 6 A. Amplitude, also einer Feldstärke von 420 Gauss Amplitude, während in *E* maximale Feldstärken von offenbar bloß 260 Gauss benutzt wurden. Da die Theorie der Messungen auf der Annahme beruht, daß die Ummagnetisierung des Stäbchens plötzlich geschehe, waren natürlich hohe Feldstärken sehr erwünscht.

Das S. 117f. beschriebene Eisenstäbchen und Nickelstäbchen kam an dem die Länge der Spulenkombination überragenden Glasstab axial in das Spulenpaar zu stehen, indem der Glasstab auf dem Unterlagebrett der Spulen ruhte und von oben her durch eine in einem Galgen eingelassene Schraube fest an die Unterlage angedrückt wurde. Durch Bewegung des Galgens war es möglich, kleine Abweichungen in der Richtung des Glasstabes, also auch des Stäbchens hervorzurufen. Das in der Mitte des Stäbchens zur Beobachtung der Schwingungen mit Wachs befestigte Spiegelchen war aus einem dünnen genau planparallelen Galvanometerspiegel herausgeschnitten und hatte die Größe 2×3 mm. Die zuerst verwendeten Spiegel aus Mikroskopdeckgläschen lieferten nicht genügend scharfe Bilder und verzogen sich leicht nur schon durch das Befestigen am Stäbchen.

Als Lichtquelle für die objektive Spiegelablesung der Schwingungen diente eine kleine 50kerzige Halbwattlänge für 6 Volt Spannung, wie S. 119 beschrieben. Das Licht fiel durch eine Linse großer Brennweite durch den Zwischenraum zwischen den Feldspulen hindurch auf das Spiegelchen und wurde auf

eine 143 cm vom Spiegelchen entfernte Millimeterskala reflektiert, wo bei ruhendem Stäbchen ein scharf begrenzter, 1 mm breiter Lichtstreifen entstand.

Zur Erzeugung des Wechselstroms diente zuerst eine Wechselstrommaschine, die von einem Gleichstromnebenschlußmotor mit Riemen oder Gurt angetrieben wurde. Die Riemenübertragung verursachte jedoch zu große willkürliche Schwankungen in der Tourenzahl, die bei den kleinen zu messenden Frequenzdifferenzen zu sehr störend wirkten. Es wurde daher später ein Einankerumformer benutzt mit 110 Volt Gleichstrom- und 64 Volt Wechselstromspannung. Letztere genügte bei der recht großen Selbstinduktion des Spulenpaares nicht zur Erreichung der erforderlichen Wechselstromstärke. Es wurde deshalb der Wechselstrom zuerst in einen Stufentransformator geschickt, um sekundär die nötige Spannung zu erreichen.

Um vom Beobachtungsplatz aus die Tourenzahl der Maschine ändern zu können, wurde die Erregerleitung zum Beobachtungsplatz hingeleitet und dort zur groben Regulierung des Erregerstromes durch einen Gleitwiderstand geschlossen. Parallel zu diesem war ein Regulierwiderstand mit Quecksilberkontakten an amalgamierten Drähten geschaltet, der ein sehr feines Regulieren gestattete, ein viel exakteres als ein gewöhnlicher Gleitwiderstand mit seinen variablen Übergangswiderständen.

Zur Vermeidung willkürlicher Tourenzahlschwankungen war unerlässlich eine sorgfältige Instandhaltung des Gleichstromkollektors der Maschine. Durch häufiges Abschmiegeln wurde er stets ganz blank gehalten und für innigen Kontakt zwischen Kollektor und Bürsten gesorgt. Ferner wurde der Welle der Maschine eine größere Riemenscheibe aufgekeilt, wodurch sich die Trägheit des Ankers wesentlich erhöhte. Der zum Antrieb der Maschine verwendete Gleichstrom wurde stets voll aufgeladenen Batterien entnommen, und zwar Hauptstrom und Erregerstrom aus verschiedenen.

Während sich der Beobachtungsraum im Souterrain des Instituts befand, stand die Maschine im Parterre und war von ihm mehr als 30 m entfernt.

Der zu den Messungen verwendete sekundäre Transformatorstrom war sehr schön *sinusförmig*, wie die Aufnahmen mit dem Oszillographen (Figg. 5 u. 6) zeigen.

b) *Trägheitsmoment des Stäbchens.* Wie in *E* wurde dieses nach der bekannten Methode mit dem Zusatzträgheitsmoment bestimmt. Letzteres wurde geliefert von einem kleinen quaderförmigen Prisma aus Messing, das senkrecht zu seiner Längsachse durchbohrt war, so daß es gerade über das Untersuchungsstäbchen geschoben werden konnte.

c) *Bestimmung der Magnetisierungsintensität der Eisen- und Nickelstäbchen.* Da es sich um Magnetisierung mit Wechselstrom von *kleiner* Frequenz (50 Perioden) handelt, war man sicher, daß diese Magnetisierung gegenüber derjenigen mit Gleichstrom keinen Unterschied zeigt, indem in jeder Periode die der Amplitude des Stromes entsprechende maximale Induktion wirklich erreicht wird. Daher wurde die genaue ballistische Methode mit Gleichstrom angewendet. Ein steifes Papierröhrchen von 2 mm Weite und gleicher Länge wie das Untersuchungsstäbchen wurde über letzteres geschoben und war über die ganze Länge in einer Lage von 322 Windungen mit isoliertem Kupferdraht von 0,35 mm Dicke umwickelt, die als sekundäre Windungen dienten und mit einem Galvanometer verbunden waren. Das Stäbchen mit dem Glasstab kam dann in genau derselben Stellung, wie in den Hauptversuchen, in die Feldspulen zu stehen, in welchen jetzt ein Magnetfeld durch Gleichstrom erzeugt wurde und durch plötzliches Kommutieren in seiner Richtung geändert werden konnte. Die Eichung des Galvanometers geschah mit einer Eichspule bekannter Induktion. Die sehr große Schwingungsdauer des Galvanometers (32 Sekunden für die große Schwingung) ließ trotz der recht erheblichen Selbstinduktion der Feldspulen die Annahme zu, daß der Induktionsstoß beim Stromkommutieren voll und ganz auf das Galvanometer wirkte.

Es wurde so eine Induktionskurve aufgenommen für Stromstärken 1, 2, 3, ... 7 Ampères, die also jetzt die *mittlere* Induktion für die ganze Stäbchenlänge lieferte. Um einen Einblick zu erhalten, wie sich die Induktion von Stelle zu Stelle änderte, wurde eine kurze Probespule von 1,3 cm Länge, die gerade über das Stäbchen geschoben werden konnte, längs desselben verschoben und jeweilen die Induktion für die bei den meisten Versuchen angewandte Feldstärkenamplitude bestimmt. Der Unterschied zwischen größtem und kleinstem Wert betrug ca. 5 Proz.

Der Querschnitt des Untersuchungsstäbchens wurde durch direkte Messung seiner Dicke, bzw. derjenigen der 7 Teilstäbchen bestimmt, sowie auch aus Masse und spezifischem Gewicht.

Die störenden Effekte.

In *E* ist von drei Effekten die Rede, die störend auf die Messungen einwirken könnten.

a) Es könnten Schwingungen um eine Horizontalachse des Untersuchungsstäbchens eintreten, indem die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft auf die Wechselepoles des Stäbchens wirkt. Dieser Effekt konnte nicht konstatiert werden.

b) Es könnten Schwingungen um die Achse des Stäbchens in gleicher Phase mit dem Wechselstrom auftreten, herrührend von der Wirkung einer eventuellen Horizontalkomponente des Wechselfeldes auf eventuell vorhandene Eisenkristalle, deren Magnetisierung durch das Wechselfeld nicht gekippt wird. Dieser Effekt schien auch nicht vorhanden zu sein, denn, wenn die Spulen mit Hilfe der Fußschrauben geneigt wurden oder wenn die Richtung des mit dem *eingespannten* Stäbchen versehenen Glasstabes durch Verstellen des Galgens geändert wurde, so zeigte sich keine Änderung in der Resonanzamplitude des Stäbchens.

c) Schwingungen um die Vertikalachse des Stäbchens könnten hervorgerufen werden dadurch, daß die Horizontalkomponente des Erdfeldes infolge der nicht vollkommenen Zentrierung des Stäbchens auf die Wechselepoles des Stäbchens wirkt. Dieser Effekt mußte sorgfältig kompensiert werden, und dies geschah wie in *E*. Eine Gruppe von 10 Kupferdrahtwindungen war auf einen in einem Kreise von 150 cm Durchmesser gebogenen Kartonstreifen gewickelt, der auf einem Holzgestell montiert war. Die Ebene der Spule wurde lotrecht gestellt und senkrecht zur magnetischen Meridianrichtung. In die Spule kam der Tisch mit den Feldspulen zu stehen. Neben den Feldspulen stand auf dem mit Holzrollen versehenen Unterlagebrett ein Erdinduktor. So konnte jederzeit durch Verschieben des Brettes auf dem Tisch entweder das Feldspulenpaar oder der Erdinduktor zur Bestimmung der durch die Kompensationsspule zu schickenden Stromstärke in die Mitte der Kompensationsspule gerollt werden. Der große

Durchmesser der Spule gab Sicherheit, daß die Horizontalkomponente des Erdfeldes über die ganze Länge des Stäbchens hin kompensiert war.

Eine zuerst angebrachte Spule zur Kompensierung der Vertikalkomponente des Erdfeldes erwies sich als überflüssig.

Späterhin geschah die Kompensation des Erdfeldes ohne Benutzung des Erdinduktors, indem man von der Tatsache ausging, daß die Horizontalkomponente immer nur eine *Vergroßerung* und nie eine Verkleinerung der Resonanzamplitude bewirken kann. Es wurde also eine Kurve aufgenommen, die die Resonanzamplitude als Funktion des Kompensationsstromes darstellte, wenn man diesen Werte annehmen ließ über und unter demjenigen der völligen Kompensation. Die vollkommene Symmetrie der Kurve gestattete dann leicht die Bestimmung der Minimalamplitude mit der zugehörigen Kompensationsstromstärke. Wenn die Zentrierung des Stäbchens nicht sehr schlecht war, kam es auf die *ganz genaue* Einhaltung dieser Stromstärke nicht an, da die Kurve beim Minimum sehr flach verläuft. Immerhin wurde die Stromstärke mit einem Siemensinstrument abgelesen.

d) Es könnte endlich auch ein störender Effekt auftreten, herrührend von der gegenseitigen Wirkung eventueller Horizontalkomponenten des Wechselfeldes auf die Wechselfeldpole des Stäbchens. Allerdings ist die Frequenz dieses Effektes doppelt so groß, wie die des Einsteineffektes, so daß er bei Resonanz nicht in Betracht käme. Dies gilt aber nur, wenn der von der Wechselstrommaschine gelieferte Strom genau symmetrisch ist. Schon eine kleine Asymmetrie könnte die Störung hervortreten lassen, da diese dann die Frequenz des Einsteineffektes hätte. Nun wurde im Laufe der Untersuchungen mit vier verschiedenen Wechselstrommaschinen gearbeitet, nämlich zwei durch Gleichstrommotoren angetriebenen und zwei Einankerumformern. In der Größe des Einsteineffektes zeigte sich kein wesentlicher Unterschied, ob man den Strom dieser oder jener Maschine entnahm, und daraus ist wohl zu schließen, daß der obige störende Effekt bei meinen Messungen nicht vorkam, jedenfalls nur in einer Größe, die innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Methode liegt.

Die Messungen.

Es soll jetzt noch näher beschrieben werden, wie bei den Messungen vorgegangen wurde.

Vor Beginn ließ man die Maschine längere Zeit laufen, um möglichst konstante Tourenzahl und stationäre Temperaturverteilung in den Feldspulen zu erzielen. Es wurde stets Wechselstrom von ca. 50 Perioden benutzt. Die Fadenlänge des schwingenden Stäbchens, die dieser Frequenz entsprach, war ziemlich rasch gefunden durch Berechnung und Probieren. Die Stromstärke zur Kompensation des Erdfeldes war auch rasch ermittelt durch Aufsuchen von ein paar Punkten der S. 127 beschriebenen Kurve.

Die Apparate standen im Beobachtungsraum so, daß von dem Platz aus, wo der Erregerstrom der Maschine für die Änderung der Frequenz reguliert wurde, beide Millimeterskalen gleichzeitig überblickt werden konnten, nämlich diejenige, die das Lichtband der Schwingungen des Stäbchens und diejenige, die das Lichtband der Schwingungen des neuen Frequenzmessers zeigte. Bei der Aufnahme der Resonanzkurve wurde dann so vorgegangen:

Man suchte die Einstellung am Frequenzmesser, die der Resonanzfrequenz des Stäbchens möglichst entsprach — ganz genau brauchte man sie nicht zu kennen —, was wieder durch Berechnung und Probieren leicht zu finden war, und las die dieser Einstellung entsprechende Frequenz an einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser ab. Dann wurde die Klemmstelle nach beiden Seiten hin mit Hilfe der Mikrometerschraube verschoben, fortschreitend um je 1 mm oder $\frac{1}{2}$ mm oder $\frac{1}{3}$ mm. Für jede dieser neuen Einstellungen wurde durch Regulierung des Erregerstroms auf Resonanz am neuen Frequenzmesser eingestellt und im Moment, da diese erreicht war, die Amplitude des schwingenden Stäbchens abgelesen. So erhielt man die ganze Resonanzkurve durch Verschieben der Klemmstelle über einen Bereich von 8—10 mm. In unmittelbarer Nähe des Resonanzmaximums des Stäbchens mußten die Verschiebungen bloß um $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ mm geschehen wegen der Steilheit der Kurve. Bei dieser Art des Vorgehens war man unabhängig von den willkürlichen Schwankungen der Tourenzahl der Maschine; diese konnten die Aufnahme der

Kurve bloß verzögern und erforderten ziemlich große Geduld, während die ganze Kurve in wenigen Minuten hätte aufgenommen werden können, wenn auch diese ganz kleinen Schwankungen ausgeblieben wären.

Die Kurven wurden gewöhnlich in beiderlei Richtung aufgenommen, d. h. sowohl von den kleineren zu den größeren, als auch von den größeren zu den kleineren Frequenzen fortschreitend. Es zeigte sich nämlich ein Unterschied in der

Konstanten $\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$, der darin begründet sein mag, daß zur Zeit der Messungen doch noch nicht ganz stationärer Temperaturzustand in den Feldspulen erreicht war und daß die Temperaturschwankungen im Beobachtungsraum die Dimensionen des Meßdrahtes am Frequenzmesser etwas änderten.

Neben der Kurvenaufnahme wurden auch sog. „Dreipunktaufnahmen“ gemacht. Es zeigte sich nämlich, daß die Werte

$\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ für den in Betracht gezogenen Bereich der Resonanzkurve recht schön konstant waren, so daß außer dem Maximum der Kurve zwei symmetrische, d. h. zur selben Schwingungsamplitude gehörende Punkte der Kurve, zur Berechnung jenes Wertes genügten. Es wurden also drei Einstellungen am Frequenzmesser gemacht, diejenige, die dem Resonanzmaximum des Stäbchens entsprach, und die beiden um je 1 mm (oder $1\frac{1}{2}$ mm, oder 2 mm) benachbarten. Die zu letzteren gehörenden Amplituden waren nicht genau gleich, da die Kurve nicht genau symmetrisch ist; zur Berechnung diente dann der Mittelwert. Dem Nachteil der Dreipunktaufnahme, daß nur ein Punktepaar der Kurve benutzt wird, steht der Vorteil gegenüber, daß die Messung sehr rasch ausgeführt werden konnte, wodurch die vorhin genannten Temperatureinflüsse fortfielen.

Es wurden im ganzen folgende Versuche ausgeführt:

1. Messungen an einem aus einem Stück bestehenden Eisenstäbchen, das an einem Metalldraht aufgehängt war.
2. Messungen an einem zusammengesetzten, an einem Metalldraht aufgehängten Eisenstäbchen.
3. Messungen an einem zusammengesetzten, von Metalldrähten eingespannten Eisenstäbchen.

4. Messungen an einem aus einem Stück bestehenden eingepanschten Nickelstäbchen.

Die Bestimmung von λ erfolgte in den drei ersten F llen sowohl durch Aufnahme der ganzen Resonanzkurve, als auch unter Anwendung der Dreipunktmethode.

Im Falle 3. wurde auch die direkte Bestimmung der Dämpfung P durch Ausschwingenlassen des Stäbchens (vgl. S. 118 f.) ausgeführt, um eine von der Resonanzkurve unabhängige Bestimmung von λ zu haben.

Im Falle 4. wurde nur die Methode der direkten Bestimmung der Dämpfung angewendet.

1. Messungen an dem aus einem Stück bestehenden aufgehängten Eisenstäbchen.

Das zylindrische Eisenstäbchen wurde einem Bündel ganz weichen Eisendrahtes entnommen, wie man solche bei Induktionsspulen verwendet.

Es hatte folgende Dimensionen:

Länge 20,00 cm; Dicke 0,205 cm.

Querschnitt 0,0330 cm²; Volumen 0,660 cm³; Masse 5,125 g.

Aus der Masse berechnet sich die Dichte zu 7,77, also eine für Eisen normale Dichte.

Der Aufhängedraht war aus Neusilber, 0,19 mm dick und 16,5 mm lang, und ergab so eine Eigenschwingung mit der Frequenz 49,2:

Das Zusatztr gheitsmoment (Quader aus Messing) ergab sich aus der Masse $M = 20,10$ g und den Längen der zur Achse nicht parallelen Kanten $2a = 6,000$ cm und $2b = 0,503$ cm

$$Q = \frac{M}{3}(a^2 + b^2) = 60,72,$$

also zusammen mit dem später sich ergebenden Trägheitsmoment des Stäbchens ($Q = 0,03$) 60,75.

Da das mit dem Zusatz belastete Stäbchen eine Frequenz von 1,110 zeigte, so wird also das Trägheitsmoment des Stäbchens:

$$Q = 60,75 \left(\frac{1,11}{49,2} \right)^2 = \underline{\underline{0,0309}}.$$

Weil am Stäbchen Papierflügel angebracht waren, ließ sich dieser Wert nicht genau durch Berechnung kontrollieren.

Bei der Bestimmung der Magnetisierungsintensität des Stäbchens ergab sich folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,0	72	16 020	1275	841
2,0	144	17 230	1371	905
3,0	216	18 280	1455	960
4,0	288	19 040	1515	1000
5,0	360	19 600	1559	1029
6,0	432	19 860	1580	1043
7,0	504	20 100	1599	1055

Hierin bedeutet: i den Magnetisierungsstrom in Ampères, H die Feldstärke in Gauss, B die Induktion im Stäbchen (worin der Wert von H nicht enthalten), I' die Magnetisierungsintensität der Volumeneinheit, I die dem Volumen des Stäbchens entsprechende Intensität.

Die Kurve I in Fig. 2 veranschaulicht den Zusammenhang graphisch.

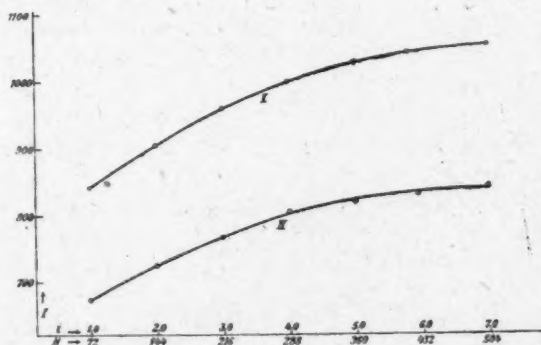


Fig. 2.

Der Einfluß des nicht kompensierten erdmagnetischen Feldes auf die Schwingungen war nicht sehr groß, indem er die Resonanzamplitude etwa verdoppelte.

Es wurde eine ganze Reihe von Resonanzkurven aufgenommen, und zwar jeweilen eine Aufnahme mit ansteigenden

und eine mit abnehmenden Periodenzahlen in unmittelbarer Aufeinanderfolge. Solche zwei Aufnahmen wurden zu einer Mittelwertkurve vereinigt.

Ich gebe hier eine solche Messung in extenso wieder:

$$i_{\text{eff}} = 2,56 \text{ A.}; i_m = 3,62 \text{ A.}; H_m = 260; I = 986.$$

Doppelte maximale Resonanzamplitude α_m , an der Millimeterskala abgelesen, $s_m = 30,5 \text{ mm}$, zugehörige Frequenz $n_0 = 49,3$.

Bei Aufnahme der Resonanzkurve ergab sich folgende Tabelle, in welcher l_1 und l_2 die Längen der beiden Drahtteile am Frequenzmesser in Zentimetern, n die Frequenz des Wechselstromes (berechnet nach S. 115 f., ausgehend vom Wert 49,2), s die doppelte Amplitude der Schwingungen, abgelesen in Millimetern an der Millimeterskala, bedeutet:

l_1	l_2	n	s
24,400	23,900	49,048	4,3
24,400	23,800	49,095	6,2
24,400	23,700	49,147	8,4
24,400	23,600	49,200	14,1
24,400	23,550	49,226	19,6
24,400	23,500	49,253	29,5
24,400	23,450	49,280	29,5
24,400	23,400	49,307	20,5
24,400	23,667	49,325	17,5
24,400	23,333	49,343	13,7
24,400	23,300	49,361	11,5
24,400	23,200	49,415	7,8
24,400	23,100	49,470	4,9
24,400	23,000	49,525	3,5

Die zugehörige Kurve (Fig. 3) verläuft ziemlich symmetrisch zum Resonanzmaximum, doch absolut symmetrisch soll sie auch nach der Theorie nicht sein.

Es wurden nun jeweiligen beide zu gegebener Amplitude gehörenden Werte von n der Kurve entnommen, dann ergab die halbe Differenz derselben den Wert n . So entstand für den Amplitudenbereich $s = 20 \text{ mm}$ bis 6 mm nachfolgende Tabelle:

s	ν	$\nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
20	0,041	0,0356
18	0,049	0,0358
16	0,059	0,0364
14	0,071	0,0367
12	0,087	0,0372
10	0,107	0,0371
8	0,133	0,0362
6	0,172	0,0345
Mittel		0,0362

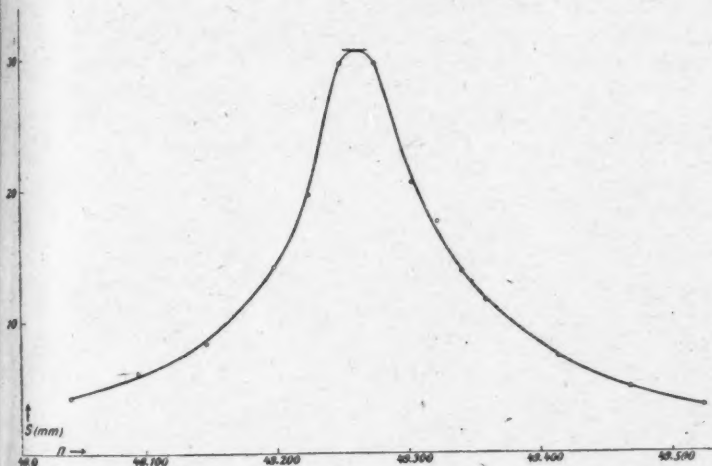


Fig. 3.

Die Werte $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ zeigen die Tendenz, zuerst zuzunehmen und dann abzunehmen, doch in unbedeutendem Maße. Jedenfalls war die Annahme berechtigt, in Gleichung (3) die Dämpfung durch ein *lineares* Glied zu berücksichtigen. Die gute Konstanz in der Tabelle ist vielleicht gerade durch die nötig gewordene Anbringung von Papierflügeln am Stäbchen erreicht worden.

Mit den gefundenen Werten wird nach Gleichung (5)

$$\lambda = \frac{\pi^2 \times 0,0309 \times 0,0362}{986} \cdot \frac{3,05}{4 \times 143} = 0,597 \cdot 10^{-7}.$$

Sogleich im Anschluß an die Messungen wurde die Resonanzamplitude für eine bedeutend größere Feldstärke abgelesen, nämlich wenn $i_m = 5,94$ A., $H_m = 427$, $I = 1044$; sie betrug hier $s_m = 3,15$ cm.

Unter Benutzung derselben Resonanzkurve von oben wird in diesem Fall:

$$\lambda = 0,582 \cdot 10^{-7},$$

und diesem Wert ist insofern größeres Gewicht beizulegen, als dem oberen, als die Magnetisierungswechsel plötzlicher geschehen. Wegen zu starker Erwärmung der Feldspulen konnte die Resonanzkurve unter Anwendung dieser hohen Stromstärke nicht genau aufgenommen werden.

Weitere Aufnahmen von Resonanzkurven ergaben folgende Werte für $v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ und λ , die beliebig herausgegriffen sind:

$v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} = 0,0349$	$v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} = 0,0352$
0,0355	0,0354
0,0355	0,0368
0,0357	0,0372
0,0367	0,0379
0,0363	0,0371
0,0366	0,0361
Mittel: 0,0359	0,0345
	Mittel: 0,0363

$$\lambda = 0,573 \cdot 10^{-7} (H_m = 427). \quad \lambda = 0,552 \cdot 10^{-7} (H_m = 408).$$

Nach der Dreipunktmethode ergaben sich folgende Werte für λ :

$$\begin{array}{r} \lambda = 0,554 \cdot 10^{-7} \\ 0,561 \cdot 10^{-7} \\ \hline \text{Mittel: } 0,558 \cdot 10^{-7} \end{array}$$

Als Gesamtmittelwert für λ ergibt sich, wenn man den Einzelresultaten verschiedene Gewichte beilegt,

$$\lambda = 0,57 \cdot 10^{-7},$$

also ein Wert, der sehr genau die Hälfte des zu erwartenden Wertes $1,13 \cdot 10^{-7}$ ausmacht.

2. Messungen an dem zusammengesetzten aufgehängten Eisenstäbchen.

Die Teildrähte, aus denen das Untersuchungsstäbchen nach S. 117 zusammengesetzt war, wurden durch Ziehen und nachheriges Ausglühen aus unter 1. benutzten Stäbchen hergestellt. Die mechanische Einwirkung durch Ziehen hatte eine Abnahme der Induktion zur Folge.

Das zusammengesetzte Stäbchen war an einem Kupferdraht von 0,2 mm Dicke und 1,90 cm Länge aufgehängt und trug einen Papierflügel (zur Erhöhung der Dämpfung).

Die Dimensionen des Stäbchens waren:

Länge 20,03 cm; mittlere Dicke der 7 Teilstäbchen 0,736 mm.

Daraus: Eisenquerschnitt des ganzen Stäbchens 0,0298 cm²

Querschnitt aus Masse und Dichte berechnet . 0,0291 cm²

Benutzter Mittelwert 0,0294 cm²

Volumen 0,589 cm³

Trägheitsmoment (wie früher bestimmt) 0,0291.

Die Magnetisierungsintensität in Funktion der Stromstärke bzw. Feldstärke zeigt folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,0	72	14 350	1142	673
2,0	144	15 460	1230	724
3,0	216	16 310	1298	764
4,0	288	17 160	1365	804
5,0	360	17 490	1392	820
5,9	425	17 740	1412	831
7,0	504	17 990	1432	843

Graphisch ist sie in Kurve II von Fig. 2 dargestellt.

Der Einfluß des erdmagnetischen Feldes war hier sozusagen *gleich Null*, indem eben ganz zufälligerweise das Stäbchen außerordentlich gut zentriert war.

Die Resonanzkurvenaufnahmen ergaben hier im Mittel für λ den Wert:

$$\lambda = 0,57 \cdot 10^{-7}$$

bei einer angewandten Maximalfeldstärke von 352 Gauss.

Die Dreipunktaufnahmen gaben die Werte:

$$\lambda = 0,587 \cdot 10^{-7}$$

$$0,563 \cdot 10^{-7}$$

$$0,600 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{Mittel: } 0,583 \cdot 10^{-7}$$

Als Gesamtmittel ergibt sich daraus:

$$\lambda = 0,58 \cdot 10^{-7}.$$

Die gute Übereinstimmung der Werte in 1. und 2. zeigt, daß die Wirbelströme im Eisenstäbchen keine merklichen Störungen auf die Messungen ausübten.

Auch hier liegt der Wert von λ in nächster Nähe der Hälfte des theoretisch zu erwartenden Wertes.

3. Messungen am zusammengesetzten eingespannten Eisenstäbchen.

a) Messungen mit Aufnahme der Resonanzkurve.

Es handelt sich um genau dasselbe Stäbchen wie in 2., nur daß es nicht aufgehängt, sondern eingespannt war mit Neusilberdraht von 0,19 mm Dicke und $2 \times 3,3$ cm Länge. Es wurden zwei Papierflügel in symmetrischer Lage am Stäbchen befestigt.

Das Trägheitsmoment betrug

$$Q = 0,0310.$$

(Der Unterschied gegenüber 2. rührt vom 2. Flügel her.)

Der Einfluß der erdmagnetischen Kraft war hier viele Male größer als in 2. Es war daher notwendig, den Eliminationsstrom recht genau zu bestimmen, indem, wie S. 127 beschrieben, eine Kurve aufgenommen wurde.

Eine Resonanzkurvenaufnahme sei hier wiedergegeben, und zwar eine Mittelwertkurve (Fig. 4).

Aus ihr ergibt sich folgende Tabelle:

s	ν	$\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
18	0,032	0,0317
16	0,040	0,0320
14	0,049	0,0320
12	0,060	0,0319
10	0,075	0,0322
8	0,098	0,0326
6	0,134	0,0326

Mittel: 0,0321

Ferner war: $s_m = 25,6 \text{ mm}$; $i_m = 3,56 \text{ A.}$; $H_m 256$; $I = 787$.
Dann wird:

$$\lambda = 0,559 \cdot 10^{-7}.$$

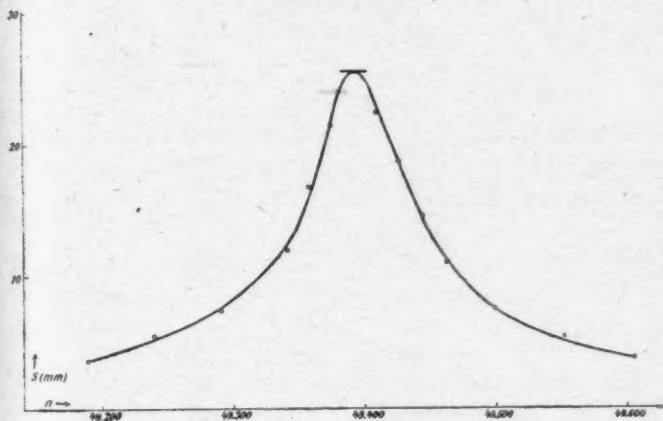


Fig. 4.

Wie die Theorie verlangt, sind die Werte von $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ sehr konstant. Daß diese Konstanz nicht nur auf Zufall beruht, mögen die folgenden aus anderen Resonanzkurven sich ergebenden Werte von $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ zeigen, die alle in ungefähr demselben Kurvenbereich liegen:

II.	III.
0,0329	0,0312
0,0310	0,0307
0,0308	0,0313
0,0310	0,0314
0,0315	0,0315
0,0329	0,0320
0,0317	0,0326
	0,0327
	0,0317

Aus den verschiedenen Kurvenaufnahmen ergibt sich als Mittelwert:

$$\lambda = 0,56 \cdot 10^{-7}.$$

Die Dreipunktaufnahmen ergaben folgende Werte:

$$\lambda = 0,560 \cdot 10^{-7}$$

$$0,561 \cdot 10^{-7}$$

$$0,592 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{Mittel: } 0,571 \cdot 10^{-7}$$

Also Gesamtmittel:

$$\lambda = 0,57 \cdot 10^{-7},$$

d. h. wieder ein Wert gleich der Hälfte des theoretisch zu erwartenden Wertes.

b) Messungen mit direkter Bestimmung von P.

Es wurde hier dasselbe Stäbchen wie in a) in genau derselben Anordnung gebraucht und das logarithmische Dekrement der Schwingungen nach S. 118 f. bestimmt. Nachdem nämlich s_m abgelesen worden, wurde durch Annähern eines Magneten an das Stäbchen die Amplitude vergrößert, dann der Wechselstrom ausgeschaltet und die photographische Aufnahme der Schwingungen gemacht.

Bei einer solchen Messung war:

$$i_m = 4,33 \text{ A.}; H_m = 312; I = 809; s_m = 2,60 \text{ cm}; n = 49,5.$$

u_{cm}	$\log u$	$\log u_0 - \log u_{100}$	u_{cm}	$\log u$	$\log u_0 - \log u_{100}$
4,97	0,6964	0,1779	2,19	0,3404	0,1781
4,77	0,6785		2,10	0,3222	0,1761
4,57	0,6599		2,02	0,3054	0,1789
4,38	0,6415		1,95	0,2900	0,1789
4,23	0,6263		1,85	0,2672	0,1880
4,09	0,6117		1,78	0,2504	0,1889
3,85	0,5855		1,71	0,2330	0,1836
3,71	0,5694		1,66	0,2201	0,1778
3,55	0,5502		1,57	0,1959	0,1825
3,44	0,5366		1,51	0,1790	0,1827
3,30	0,5185		1,48	0,1703	0,1701
3,15	0,4983		1,42	0,1523	0,1699
3,05	0,4843		1,33	0,1239	0,1815
2,91	0,4639		1,30	0,1139	0,1761
2,82	0,4502		1,26	0,1004	0,1668
2,75	0,4393	0,1724	1,20	0,0792	0,1712
2,61	0,4166	0,1689	1,13	0,0531	0,1799
2,50	0,3979	0,1715	1,10	0,0414	0,1787
2,39	0,3784	0,1718	1,07	0,0294	0,1665
2,30	0,3617	0,1749	1,01	0,0043	0,1747

Mittel: 0,1763

$$\log \text{nat } u_0 - \log \text{nat } u_{100} = 0,4060.$$

Entnimmt man der photographischen Aufnahme je die 10. Lichtbandbreite, $u_0, u_{10}, u_{20}, u_{30} \dots$, definiert nach S. 119, so erhält man vorstehende Tabelle.

Wie die Tabelle zeigt, wurde zur Bestimmung des Dekrements der Amplitudenbereich von 5 bis 1 cm benutzt, entsprechend der Resonanzamplitude $s_m = 2,6$.

Nun ist:

$$d = \frac{\log \text{nat} \frac{u_0}{u_{100}}}{100} = 0,00406,$$

$$P = 2 Q d n = 2 \times 0,0310 \times 0,00406 \times 49,5 = \underline{0,01246}.$$

Mit diesem Wert wird nach Formel (4):

$$\lambda = \frac{\pi \times 0,01246}{4 \times 809} \cdot \frac{2,60}{4 \times 143},$$

$$\lambda = 0,550 \cdot 10^{-7}.$$

Eine zweite photographische Aufnahme ergab unter übrigen gleichen Umständen: $d = 0,00408$; $P = 0,01277$.

$$\lambda = 0,546 \cdot 10^{-7}.$$

Also auch nach dieser Methode ergeben sich Werte in nächster Nähe der Hälfte des theoretisch erwarteten Wertes.

Weitere Dekrementbestimmungen wurden ausgeführt, wenn die beiden Papierflügel am Stäbchen fehlten und dieses in anderer Art eingespannt war, einfach mit zwei Klemmen, ohne Federzug. Dies war die Einrichtung, bevor man zur anderen, viel besseren, übergegangen war. Dabei ergab sich z. B. folgende Messung:

$$i_m = 4,80 \text{ A.}; H_m = 345; I = 819; s_m = 3,45 \text{ cm}; u_0 = 50,3;$$

$$Q = 0,0273; d = 0,00366; P = 0,01006.$$

$$\lambda = 0,582 \cdot 10^{-7}.$$

Als Gesamtmittel für alle mit *Eisen* angestellte Messungen wird:

$$\lambda = 0,57 \cdot 10^{-7}.$$

4. Messungen an einem eingespannten Nickelstäbchen.

Das Nickel war rein und stammte aus den Rheinischen Nickelwerken in Westfalen.

Da die Magnetisierungsfähigkeit des Nickels im Vergleich zu derjenigen des Eisens bedeutend kleiner ist, mußte dafür

gesorgt werden, daß das schwingende System möglichst kleine Dämpfung habe, so daß hier natürlich die dämpfenden Papierflügel weggelassen wurden und das Stäbchen nur in *eingespannter* (nicht auch aufgehängter) Lage benutzt wurde. Die dadurch erzielte Kleinheit der Dämpfung mag daraus ersehen werden, daß das frei ausschwingende Stäbchen mehr als 9 Sekunden brauchte, bis die Amplitude auf die Hälfte ihres Betrages gesunken war. Die Resonanzkurve würde hier also sehr spitz ausfallen, so daß aus Genauigkeitsgründen von einer Aufnahme derselben ganz abgesehen wurde. Es kam hier also bloß die Methode mit direkter Bestimmung der Dämpfung zur Anwendung.

Das zylindrische Stäbchen hatte folgende Daten:

Länge 19,98 cm; Dicke 0,202 cm;

Querschnitt 0,0320 cm²; Volumen 0,641 cm³; Masse 5,67 g;

Trägheitsmoment (wie früher bestimmt) 0,0293.

Nach der Formel $Q = \frac{1}{2} Mr^2$ berechnet, würde sich für Q ergeben 0,0289, also in sehr guter Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert, was auf sehr gute Zentrierung des Stäbchens schließen läßt.

Die Magnetisierungsintensität in Funktion der Stromstärke bzw. Feldstärke — wie früher bestimmt — zeigt folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,20 A.	86	4722	375,7	240,8
2,04 „	146	5374	427,6	274,0
3,10 „	223	5721	455,2	291,8
4,00 „	288	5845	465,0	298,1
5,00 „	360	5942	472,7	303,0
6,23 „	450	5992	476,8	305,6

Die aus mehreren Ausschwingungsbeobachtungen berechnete Größe der Dämpfung wurde im Mittel gefunden zu:

$$P = 0,00473_4$$

für den Amplitudenbereich, der in Betracht kam. Es zeigte sich hier — wo keine Papierflügeldämpfung angewendet wurde — ein mit der Amplitude langsam abnehmendes logarithmisches Dekrement.

Die Lichtbandbreite der Resonanzamplitude betrug:

bei $i_m = 4,24$ A., also $H_m = 305$ Gauß und $I = 300 : s_m = 2,7$ cm

„ $i_m = 5,7$, „ „ $H_m = 410$ „ „ $I = 304 : s_m = 2,7$ „

Danach ergeben sich folgende zwei Werte:

$$\lambda = \frac{\pi \cdot P a_m}{4 I_v} = \frac{\pi \times 0,00473_4 \times 2,7}{4 \times 300 \times 4 \times 143} = 0,585 \cdot 10^{-7}$$

$$\lambda = 0,577_4 \cdot 10^{-7}.$$

Es ergibt sich also auch bei Nickel ein Wert für λ , der recht genau die Hälfte vom theoretisch zu erwartenden Wert beträgt.

Bei allen Werten von λ , sowohl für Eisen- als für Nickelstäbchen, sind noch Korrekturen anzubringen, von welchen im nächsten Abschnitt die Rede sein soll.

Erfüllung der Versuchsbedingungen.

Die Berechnung der Meßresultate im letzten Abschnitt erfolgte unter der Annahme, daß die Bedingungen, die der Theorie zugrunde gelegt wurden, streng erfüllt seien. Zu diesen gehört vor allem die Annahme, daß die Ummagnetisierungen des Eisen- bzw. Nickelstäbchens ganz plötzlich geschehen. Wie weit diese Bedingung erfüllt ist, soll nun experimentell untersucht werden.¹⁾ Dabei kann dann gleichzeitig geprüft werden, wie weit die bei Resonanz auftretende Tatsache zutrifft, daß nämlich die bei den plötzlichen Ummagnetisierungen erfolgenden Impulse eintreten in den Momenten, da das Stäbchen jeweils durch die Gleichgewichtslage schwingt.

Auf zwei Glasröhrchen wurde Kupferdraht aufgespult, so daß zwei genau gleich große Spulen entstanden mit je 8 mm Durchmesser, 97 mm Länge und 160 Windungen. Die Röhrchen wurden parallel aneinander gelegt, die Windungen in Serie, aber gegeneinander geschaltet, und die Kombination kam in die Mitte der großen Meßspulen zu stehen. Die kleinen Spulen waren durch einen induktionslosen Widerstand von 60 Ohm (Eisenstäbchen) resp. 30 Ohm (Nickelstäbchen) in Serie mit der einen Meßschleife eines Oszillographen von S. & H. geschaltet. Die andere Meßschleife diente zur Aufnahme der Kurve des Wechsel-

1) Vgl. Fußnote S. 119.

feldstromes und war zu diesem Zweck parallel zu einem induktionsfreien Widerstand geschaltet, der sich in jenem Stromkreis befand. Da die kleinen Spulen gegeneinander geschaltet waren, zeigte sich bei vorhandenem Wechselfeld kein induzierter Strom in der ersten Meßschleife, wohl aber, sowie man in eine der kleinen Spulen das Eisen- oder Nickelstäbchen einführte, und zwar mußte dieser Strom proportional der ihn erzeugenden elektromotorischen Kraft und in gleicher Phase mit ihr sein, da die Selbstinduktion des Stromkreises verschwindend klein war gegenüber seinem Widerstand (60—30 Ohm); er mußte also genau den zeitlichen Verlauf von dI/dt wiedergeben und damit auch den zeitlichen Verlauf des Drehmoments D . Fig. 5 gibt die gleichzeitig aufgenommenen Oszillogramme für den Meßspulenstrom in der Stärke $i_{\text{eff}} = 3,2$ A. und das Drehmoment im Falle des zusammengesetzten Eisenstäbchens, Fig. 6 die entsprechenden für das Nickelstäbchen.

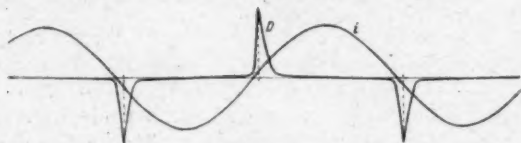


Fig. 5.

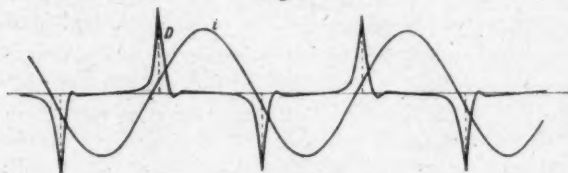


Fig. 6.

Die Zacken der Drehmomentkurve sind um ca. 6° bzw. 10° gegen die Nullstellen der Stromkurve vorgeschoben, womit deutlich die Hysteresis zum Ausdruck kommt.

Nun wurde bei einer früheren Oszillogrammaufnahme (bei Bestimmung des Vorzeichens der Elektronen, S. 122) gefunden, daß Drehmoment und Stäbchenschwingung im Falle der Resonanz genau in der Phase übereinstimmen. Daraus mußte man also schließen, daß die Drehimpulse etwas verspätet erfolgen, nämlich mit einer Phasendifferenz von ca. 6° bzw. 10° gegen

die Stäbchenschwingung. Vielleicht ist übrigens — wie schon S. 122 erwähnt — in Wirklichkeit diese Verschiebung gar nicht vorhanden, sondern wird nur durch nicht ganz zu vermeidende kleine Selbstinduktionen vorgetäuscht, die in den Meßschleifenkreisen vorhanden sein können.

Das Oszillogramm zeigt deutlich in der Breite der Zacken und in dem nicht genau mit der Nulllinie zusammenfallenden Verlauf des Drehmoments zwischen den Zacken die Abweichung vom idealen Fall der plötzlichen Ummagnetisierung. In Wirklichkeit werden allerdings die Zacken etwas schmaler sein, da die Meßschleife wegen ziemlich hoher Dämpfung dem Impuls vielleicht nicht unmittelbar folgen konnte. Es war überhaupt nicht leicht, die richtige Dämpfung herauszufinden; war sie zu klein, so kamen wegen der Eigenartigkeit der Kurve sogleich die Eigenschwingungen der Meßschleife zum Ausdruck (wie z. B. bei der Nickelkurve die kleine Zacke auf der Nulllinie zeigt); war sie zu groß, so mußte Verzögerung befürchtet werden. Jedenfalls aber muß auf Grund der Kurven an den bei der Berechnung von λ benutzten Werten von I , die den Feldwechselstromamplituden entsprachen, eine Korrektur angebracht werden in verkleinerndem Sinne, entsprechend dem Verhältnis der Zackenlänge, wie sie die Figur gibt, zu derjenigen im idealen Zustande und entsprechend der Zackenbreite. Diese Korrektur läßt sich nicht ganz genau angeben, doch kann man sie immerhin ungefähr berechnen. Dazu benutzt man außer den Figg. 5 u. 6 noch die graphische Darstellung des Verlaufes von I in Funktion des sinusförmigen Wechselfeldes, wie er sich nach Fig. 2 S. 131 ergibt. Auf diese Weise fand ich für Eisen eine Korrektur von 5 Proz., für Nickel eine solche von 10 Proz., welche Werte dann allerdings als Maximalwerte aufzufassen sind.

Die Beobachtung der Oszillogramme bei kleinerem Feldwechselstrom (2,5 A.) ließ kaum eine Änderung in der Drehmomentkurve erkennen, sodaß jene Korrektur, die sich auf 3,2 A. bezieht, als für alle in der Arbeit angewandten Stromstärken gültig betrachtet werden kann.

Bringt man also am Werte von I obige verkleinernde Korrektur an, so werden die S. 139 und S. 141 angegebenen Mittelwerte von λ :

$$\text{Eisen: } \lambda = 0,60 \cdot 10^{-7},$$

$$\text{Nickel: } \lambda = 0,64 \cdot 10^{-7},$$

das sind Werte, die um 47 Proz., resp. um 43 Proz. kleiner sind, als der theoretisch zu erwartende Wert $1,13 \cdot 10^{-7}$. Um so viel Prozent wäre also auch das innere Impulsmoment des magnetischen Eisens und Nickels kleiner, als die Theorie es verlangt. Da die Korrekturen eher zu hoch bemessen sind, dürften diese Abweichungen als Minimalwerte zu betrachten sein.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde, die von Einstein und de Haas im Jahre 1915 angewendete Methode zur Bestimmung des inneren Impulsmoments eines magnetisierten Körpers vervollständigt und weiter ausgebaut, um größere Genauigkeit zu erzielen. Auch wurde das Untersuchungsgebiet vergrößert dadurch, daß: 1. drei verschiedene magnetische Substanzen, nämlich zwei Eisensorten und eine Nickelsorte, untersucht wurde; 2. die Einsteinsche Methode in zwei voneinander unabhängigen Formen zur Anwendung kam; 3. die Eisen- und Nickelstäbchen in verschiedenen Montierungen untersucht wurden.

Durch alle Messungen konnte übereinstimmend der „Einsteinseffekt“ nachgewiesen werden, aber in einer Größe, die nicht der zugrunde gelegten Theorie entspricht, nach welcher nur negative Elektronen mit dem Wert $m/e = 0,565 \cdot 10^{-7}$ in den magnetischen Molekülen kreisen. Während Einstein und de Haas auch quantitativ eine sehr gute Bestätigung der Theorie finden, ergeben meine Messungen einen bei Eisen um 47 Proz., bei Nickel um 43 Proz. zu kleinen Einsteinseffekt.

Diskussion.

Die recht erhebliche quantitative Abweichung meiner Resultate von der Theorie und den Ergebnissen von Einstein und de Haas veranlaßte mich natürlich, alle Fehlerquellen eingehend zu untersuchen und besonders die Änderungen und Erweiterungen in meinen Meßanordnungen zu prüfen. Eine persönliche Unterredung mit Prof. Einstein war mir noch ganz besonders wertvoll.

Als wichtigster Teil der Messung ist die Aufnahme der

Resonanzkurve zu nennen. Mit Hilfe meines Frequenzmessers war es natürlich möglich, die Abszissen der Kurve viel genauer zu erhalten als in *E*, wo die Werte sich ganz auf die Eichung mit einem gewöhnlichen Frequenzmesser stützten, während mein Apparat die kleinen Frequenzdifferenzen recht genau bestimmte. Auch konnte ich — wie schon S. 128 bemerkt — allen willkürlichen Schwankungen der Frequenz Rechnung tragen, während man beim Verfahren in *E* ihnen ganz preisgegeben war. Wenn auch die Abszissen der Kurven durch Messung recht kleiner Längen an meinem Frequenzmesser bestimmt wurden, so muß die Ungenauigkeit doch wohl auf nur ganz wenige Prozent eingeschätzt werden; dies folgt aus der guten Übereinstimmung der Resultate bei vielfacher Wiederholung der Kurvenaufnahme, auch dann, wenn diese an verschiedenen Stellen des Frequenzmessers (bei verschiedenen Eigenschwingungszahlen des Stäbchens) vorgenommen wurde; vor allem aber aus der guten Übereinstimmung mit den Resultaten, die sich nach dem anderen Verfahren, der direkten Bestimmung von *P*, ergaben. Gerade hierin zeigte sich in *E* eine große Differenz. Während die Kurvenaufnahme den gesuchten Effekt in erwarteter Größe ergab, lieferte die direkte Bestimmung von *P* einen um 30 Proz. zu kleinen Wert (vgl. *E* S. 164). Allerdings darf letzterem Wert nur ganz geringes Gewicht beigelegt werden, da die Versuchsbedingungen sehr ungünstige waren. Meine Bestimmung von *P* ist, weil die Schwingungen photographisch aufgenommen wurden, recht genau.

Als weitere Erhöhung der Meßgenauigkeit meiner Arbeit muß auch die direkte Bestimmung der jeweiligen Magnetisierungsintensität betrachtet werden, während man sich in *E* offenbar mit einem angenommenen Sättigungswert begnügte.

Eine große Rolle spielt bei Beurteilung der Genauigkeit die Zentrierung des Stäbchens. Daß diese bei mir meistens eine recht gute war, ergibt sich aus der schönen Übereinstimmung zwischen gemessenem und berechnetem Trägheitsmoment, das z. B. beim Nickelstäbchen 0,0293 bzw. 0,0289 betrug, und aus der Vergrößerung der Resonanzamplitude durch das erdmagnetische Feld, die nie sehr groß war, einmal sogar fast Null. In *E* waren die Werte des Trägheitsmoments 0,0070 (beob.), 0,0045 (ber.), und 0,0126 (beob.), 0,0102 (ber.).

Die gute Übereinstimmung der Einzelresultate läßt mich die Genauigkeit meiner Messungen — wenn man von den Korrekturen wegen Nichterfüllung der Versuchsbedingungen absieht — auf ca. 5 Proz. schätzen.

Es ist von Interesse, die Resultate der Arbeit zu vergleichen mit denjenigen anderer Autoren, die nach anderen Methoden das Impulsmoment eines magnetisierten Körpers zu bestimmen suchten.

So hat W. J. de Haas die Methode von *E* dahin modifiziert, daß er die magnetisierende Spule durch eine auf das Eisenstäbchen gewickelte, also mit ihm starr verbundene Windungsgruppe ersetzte und mit sehr langsamen Schwingungen arbeitete. Dadurch verschwand eine Fehlerquelle, und die Vorgänge konnten besser übersehen werden, aber andererseits ergab sich eine große Menge zu eliminierender Effekte. In der 1916 publizierte Arbeit¹⁾: „Weitere Versuche über die Realität der Ampèreschen Molekularströme“ veröffentlichte de Haas die Resultate der Messungen, wonach sich der Einsteineffekt um 14 Proz. zu klein ergibt; doch bemerkt er, daß dies nur ein vorläufiges Resultat sei. Soweit mir bekannt ist, sind bis jetzt keine weiteren Resultate veröffentlicht worden.

Im gleichen Jahre wie Einstein und de Haas veröffentlichte S. J. Barnett eine Arbeit²⁾: „Magnetization by Rotation“, in welcher versucht wird, das Impulsmoment nachzuweisen durch die Magnetisierungsintensität, die bei einem ursprünglich unmagnetischen Körper hervorgerufen wird, wenn man ihn in Rotation versetzt. Es handelt sich also hier um den zum Einsteineffekt inversen Effekt. Als Resultat findet der Verfasser ein Impulsmoment, das um 56 Proz. kleiner ist, als der Theorie entsprechend, nach welcher nur negative Elektronen kreisen. Nachdem Barnett das Resultat von *E* bekannt war, hat er seine Methode noch weiter ausgearbeitet und modifiziert, und die Resultate dieser zweiten Arbeit³⁾: „Magnetization of Iron, Nickel and Cobalt by Rotation and the Nature of the magnetic Molecule“, zeigen noch Differenzen von 28 Proz. für

1) W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 423—443. 1916.

2) S. J. Barnett, Phys. Rev. (2) 6. S. 239—270. 1915.

3) S. J. Barnett, Phys. Rev. (2) 10. S. 7—21. 1917.

Eisen, 18 Proz. für Nickel und 18 Proz. für Kobalt, also immer noch erheblich zu kleine Werte.

Erst vor einigen Wochen ist mir eine Arbeit¹⁾ von J. Q. Stewart: „The Moment of Momentum accompanying magnetic Moment of Iron and Nickel“ zu Gesicht gekommen, in welcher versucht wird, den Einsteineffekt durch Magnetisierungsänderung zu bestimmen, aber nur unter Benutzung des remanenten Magnetismus, in ähnlicher Weise, wie es Einstein bei seinem Vorlesungsversuch²⁾ tut. Auch Stewart findet den Einsteineffekt viel zu klein und zwar um 49 Proz. bei Eisen und um 53 Proz. bei Nickel.

Allerdings darf den von Barnett und Stewart gefundenen Resultaten kein allzugroßes Gewicht in quantitativer Hinsicht beigelegt werden, da ihre Methoden gegenüber der in dieser Arbeit angewandten, was Genauigkeit betrifft, weit zurückstehen. Das zeigt sich vor allem in den großen Differenzen, die die Einzelresultate aufweisen. Wichtig ist aber die Tatsache, daß alle auf unserem Gebiete ausgeführten Messungen, mit Ausnahme der in *E* mit Resonanzkurven-Aufnahmen gemachten, bedeutend zu kleine Werte für das Impulsmoment ergeben haben, was nicht nur der Ungenauigkeit zugeschrieben werden kann.

Eine Erklärung für die Abweichung von der Theorie kann sich vorläufig nur auf Vermutungen gründen. Ein um 43 bis 47 Proz. zu kleiner Wert des Impulsmomentes ist — unter der Annahme, daß nur negative Elektronen kreisen — gleichbedeutend mit einem um gleichviel zu kleinen Wert von m/e . Nun ist diese Größe auf Grund verschiedener einwandfreier Messungen recht genau bekannt, und zwar ist der zugrunde gelegte Wert $0,565 \cdot 10^{-7}$ der einer langsamen Elektronenbewegung entsprechende, der nicht unterschritten werden kann.

Man müßte also entweder annehmen, daß es sich bei den Ampèreschen Molekularströmen um Elektronen besonderer Art handelt, oder dann, daß die Verhältnisse nicht so einfach liegen, wie sie in der Theorie angenommen worden sind. Letzteres wäre gar nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, wie kompliziert die magnetischen Erscheinungen sind. Will man

1) J. Q. Stewart, Phys. Rev. (2) 11. S. 100—120. 1918.

2) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 173—177. 1916.

an der bekannten Größe von m/e festhalten, so wäre — wie eine einfache Rechnung zeigt — eine Erklärung der Differenz möglich durch die Annahme, daß nicht nur negative Teilchen kreisen, sondern auch positive am Molekularstrom beteiligt sind. Diese Annahme würde aber den herrschenden Anschauungen widersprechen, es sei denn, daß man an eine Rotation des positiven Kerns des Atoms oder Moleküls denken würde.

Die vorliegende Arbeit ist ausgeführt worden im Physikalischen Institut der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Ich möchte dem Direktor der elektrotechnischen Abteilung desselben, Hrn. Prof. Dr. K. Kuhlmann, meinen verbindlichsten Dank aussprechen für die Bereitwilligkeit, mit der er mir alles für meine Untersuchungen notwendige zur Verfügung stellte. Auch seinem Assistenten, Hrn. Dr. J. Goldstein, bin ich verpflichtet, indem er mich bei Aufnahme der Oszillogramme Figg. 5 u. 6 ganz wesentlich unterstützte. Mein Dank gilt endlich auch dem ausgezeichneten Chefmechaniker des Instituts, Hrn. A. Kluth, der mit großem Geschick und ganzer Sachkenntnis die verschiedenen Präzisionsarbeiten ausführte.

Zürich, April 1919.

(Eingegangen 7. Mai 1919.)

**2. Elementare Theorie der terrestrischen
Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen;
von Joseph Würschmidt.**

Die Erscheinungen, welche durch die Brechung und Reflexion des Lichtes in unserer Atmosphäre hervorgerufen werden, lassen sich nach Pernter-Exner¹⁾ in drei Gruppen einteilen:

„1. Solche, welche durch die normale Dichteabnahme der Luftschichten von der Erdoberfläche nach oben hervorgerufen werden.

2. Diejenigen, welche in abnormalen Zuständen der Dichteverhältnisse in den Luftschichten ihre Ursache haben.

3. Die Erscheinungen, bei denen ein mehr oder weniger rascher Wechsel der Dichte in den Luftschichten als Ursache mitwirkt.“

Die Dichte der Atmosphäre, die bei all diesen Erscheinungen maßgebend ist, da durch sie der Wert des Brechungsindex und damit die mehr oder weniger starke Ablenkung eines Lichtstrahles von der geradlinigen Bahn bedingt ist, ist im allgemeinen mit der Höhe veränderlich (und zwar in doppeltem Sinne); sie ist nämlich eine Funktion des Luftdruckes und der Temperatur, die sich beide im allgemeinen mit der Höhe ändern. Bei konstanter Temperatur nimmt sie proportional mit dem Luftdruck, also nach der barometrischen Höhenformel ab, bei veränderlicher Temperatur kann sie sowohl ab- als auch zunehmen, oder auch bei einer bestimmten Temperaturänderung mit der Höhe konstant bleiben. Die älteren theoretischen Untersuchungen, besonders von Tait und Biot, haben im allgemeinen der Änderung der Dichte mit der Höhe kein spezielles Gesetz zugrunde gelegt, sondern zunächst allgemein die Gestalt der Bahnkurve der Lichtstrahlen untersucht und vielfach erst zum Schluß spezielle Annahmen

1) Pernter-Exner, Meteorologische Optik. S. 55.

gemacht, um die beobachteten Erscheinungen zu deuten. Da diese Art der Darstellung, der sich auch J. M. Pernter und Felix M. Exner anschließen, naturgemäß der Anschauung wenig bietet, so werden hierbei die einzelnen Fälle durch Zeichnungen des jeweiligen Strahlenganges erläutert, die den wahren Verlauf wenigstens qualitativ darstellen. Dementsprechend findet sich in unseren Lehrbüchern der Physik vielfach nur eine qualitative und zeichnerische Darstellung des Strahlenverlaufes bei den genannten Erscheinungen.

Einen anderen erfolgreichen Weg, um eine Theorie der atmosphärischen Spiegelungen zu geben, hat kürzlich A. Wegener¹⁾ eingeschlagen und die Spiegelung nach oben, diejenige nach unten und die Zerrbilder der Sonne im Horizont behandelt. Er ging davon aus, daß bei den in neuester Zeit vielfach untersuchten Temperaturinversionen mehr oder weniger deutlich die Luft in zwei Schichten, eine untere kalte und eine obere warme, zerlegt erscheint. Wenn auch dieser Temperatursprung nicht scharf, sondern durch teilweise Mischung der Schichten mehr oder weniger verwaschen ist, so hat Wegener für seine Berechnungen doch einen scharfen Temperatursprung angenommen, so daß der Lichtstrahl an dieser Grenzschicht knickförmig gebrochen bzw. reflektiert werden kann. Für den Verlauf in den beiden Schichten selbst nimmt er an, daß innerhalb der Schichten normale Brechungsverhältnisse vorhanden sind, d. h. daß der Lichtstrahl einen flachen Kreisbogen beschreibt, wie es in der Theorie der terrestrischen Refraktion gewöhnlich angenommen wird. Außerdem hat er die Erdkrümmung, abweichend von den älteren Theorien, berücksichtigt; daß diese wesentlich in Betracht kommt, geht, wie er mit Recht hervorhebt, schon daraus hervor, daß sie wesentlich stärker ist als diejenige der Lichtstrahlen unter normalen Verhältnissen.

Da aber die scharfe Schichtgrenze in der Natur niemals existiert, sondern stets ein allmählicher Übergang vorhanden ist, so schien es von Interesse, eine Erklärung der Erscheinungen der terrestrischen Refraktion unter der Annahme zu versuchen, daß kein Temperatursprung, sondern nur eine ge-

1) A. Wegener, Elem. Theorie d. atmosph. Spiegelungen. Ann. d. Phys. 57. S. 203. 1918.

setzmäßige Änderung der Temperatur mit der Höhe vorhanden ist; an Stelle der „Reflexion“ Wegeners, die an der Grenze der beiden Schichten stattfindet, tritt somit eine allmähliche „Umbiegung“ der Lichtstrahlen, wie sie auch für Schallstrahlen z. B. zur Erklärung der abnormen Schallausbreitung herangezogen wird.¹⁾ Wenn man dann noch für die Änderung der Dichte mit der Höhe ein einfaches mit der Erfahrung im Einklang stehendes Gesetz zugrunde legt, so bietet sich die Möglichkeit, die Bahnen der Lichtstrahlen selbst analytisch darzustellen, bzw. aus verschiedenen analytisch darstellbaren Teilen, den einzelnen Schichten entsprechend, zusammenzusetzen, dann die Eigenschaften der Lichtkurven zu untersuchen und zu zeigen, wie sich die beobachteten Erscheinungen hieraus erklären lassen.

Zunächst seien einige Betrachtungen über die Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe vorausgeschickt.

1. Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe.

Da die Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe sowohl von derjenigen des Luftdruckes, als auch der Temperatur abhängt, so sei für letztere das einfachste Gesetz, das möglich ist und das auch mit den Betrachtungen im Einklang steht²⁾ nämlich eine lineare Änderung angenommen; es gelte also die Beziehung

$$T = T_0 - cy$$

wobei T_0 die Temperatur an der Erdoberfläche und T diejenige in der Höhe y ist.³⁾ Ist die Konstante c positiv, so nimmt die Temperatur mit der Höhe ab (normale Temperaturabnahme: $c = 0,005$ bis $0,01$); negativem c entspricht eine Temperaturzunahme mit der Höhe, dem Nullwerden eine konstante Temperatur.

Die „Differentialgleichung der Statik der Atmosphäre“⁴⁾ ist

$$-\rho g = \frac{\partial p}{\partial y},$$

1) J. Würschmidt, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soc. Erlangen. 50. 51. S. 115. 1919.

2) F. M. Exner, a. a. O. S. 86.

3) Diese Beziehung gilt auch bei Berücksichtigung der Erdkrümmung, wenn wir annehmen, daß die Temperatur auf einer zur Erde konzentrischen Kugelfläche konstant ist.

4) F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, S. 37.

wenn ϱ die Dichte, g die Schwerkraftbeschleunigung und p den Druck bedeutet. Setzt man $p = \varrho R T$ (Zustandsgleichung) und $T = T_0 - c y$, so ergibt sich

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{g - Rc}{R} \frac{dy}{T_0 - cy}$$

oder, integriert, wenn $\varrho = \varrho_0$ für $T = T_0$ ($y = 0$)

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{g - Rc}{Rc} \lg \frac{T_0 - cy}{T_0}$$

d. h. eine Form, die ebenso wie die für die Abnahme des Druckes mit der Höhe ähnlich der Poissonschen Gleichung gebaut ist. Hierfür schreiben wir in erster Annäherung (vgl. die bekannte erste Annäherung der barometrischen Höhenformel):

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho + \varrho_0} = \frac{g - Rc}{Rc} \frac{-cy}{2T_0 - cy}$$

oder

$$\varrho = \varrho_0 \frac{2R T_0 - gy}{2R T_0 + y(g - 2Rc)}$$

Nun ist nach Exner¹⁾ $R = 29,27 \cdot g$, also

$$\varrho = \varrho_0 \frac{58,54 T_0 - y}{58,54 T_0 + y(1 - 58,54 c)}$$

Da c für normales Gefälle von der Größenordnung 0,005 bis 0,01 ist, so ist $c \cdot 58,54 < 1$; auch wenn c negativ und sehr groß ist, so bleibt immer noch für nicht allzugroße y $y(1 - 58,54 c)$ klein gegen $58,54 T_0$; also gibt angenähert

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{g}{2R T_0} y\right) \left(1 - \frac{g - 2Rc}{2R T_0} y\right) = \left(1 - \frac{g - Rc}{R T_0} y\right) \varrho_0$$

d. h. die Dichte nimmt in 1. Annäherung linear mit der Höhe ab, solange $g > Rc$ oder $c < g/R = 0,034$ (vgl. hierzu auch A. Wegener, a. a. O. S. 205); d. h., wenn die Temperatur mit der Höhe zunimmt, konstant bleibt oder weniger als um 3,4° pro 100 m abnimmt.

2. Änderung des Brechungsindex mit der Höhe.

A. Ebene Erdoberfläche.

Wenn auch, wie oben bemerkt, die Krümmung der Erdoberfläche für die Darstellung nicht vernachlässigt werden darf, so bietet es doch, wie aus späterem ersichtlich sein wird, gewisse Vorteile, die Theorie zunächst unter der Annahme einer

1) F. M. Exner, a. a. O. S. 9.

ebenen Erdoberfläche aufzustellen. Denken wir uns die Atmosphäre in eine Reihe von parallelen Schichten zerlegt, innerhalb deren die Dichte konstant sei und nacheinander die Werte $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots$ vom Erdboden beginnend annehme. Dann ist, wenn man Einfallswinkel und Brechungswinkel an der i ten Schicht mit α_{i-1} und α_i bezeichnet, und $r_0, r_1, r_2 \dots$ die absoluten Brechungsindizes sind

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0} = \frac{r_0}{r_1}, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \dots \quad \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i-1}} = \frac{r_{i-1}}{r_i}$$

oder auch

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_0} = \frac{r_0}{r_i}.$$

Da nach einem empirischen Gesetz¹⁾ für Gase gilt

$$r - 1 = C \cdot \varrho,$$

so ist

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_0} = \frac{1 + C \varrho_0}{1 + C \varrho} = 1 + C(\varrho_0 - \varrho),$$

da der absolute Brechungsindex der Luft wenig von 1 verschieden ist.

Läßt man jetzt die Zahl der Schichten unendlich groß werden, so ändert sich die Dichte stetig mit der Höhe, und man erhält, wenn man die oben gefundene Abhängigkeit der Dichte von der Höhe einführt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = 1 + Ay$$

wobei $C \frac{g - R c}{R T_0} \varrho_0 = A$ gesetzt ist; d. h. der Sinus des Brechungswinkels ändert sich in erster Annäherung linear mit der Höhe.

B. Gekrümmte Erdoberfläche.

Bei gekrümmter (kugelförmiger) Erdoberfläche denken wir uns die Atmosphäre in eine Reihe konzentrischer Schichten zerlegt. Ein Strahl, der die Erdoberfläche unter dem Winkel α_0 gegen die Vertikale verläßt, trifft auf die Grenzfläche der ersten Schicht unter dem Winkel α'_0 und wird dann gebrochen, so daß

1) O. Chwolson, Lehrb. d. Phys. 2. S. 372; A. Wegener, a. a. O. S. 210.

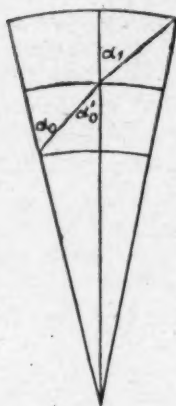


Fig. 1.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0'} = \frac{r_2}{r_1}$$

Ist der Erdradius R und die Höhe der ersten Schicht $r_1 - R$ so gilt

$$\frac{\sin \alpha_0'}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_1},$$

oder es ist

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_1} \frac{r_2}{r_1}.$$

Entsprechend für die zweite Schicht:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \text{ usw.}$$

Oder

$$\frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_n} \frac{r_0}{r_n}.$$

Also auch

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r} (1 + C(\varrho_0 - \varrho)).$$

Oder da jetzt die Höhe über dem Erdboden $= r - R$ ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r} [1 + A(r - R)].$$

3. Bahngleichung der Lichtstrahlen.

A. Ebene Erdoberfläche.

Wir erhielten oben: $\sin \alpha = \sin \alpha_0 (1 + Ay)$; andererseits ist für jeden Punkt der Bahn: $dx = dy \cdot \operatorname{tg} \alpha$, oder, wenn man den Wert für $dy = \frac{\cos \alpha d\alpha}{A \sin \alpha_0}$ einsetzt:

$$dx = \frac{\sin \alpha d\alpha}{A \sin \alpha_0}.$$

Integriert man und bestimmt man die Konstante so, daß $\alpha = \alpha_0$ für $x = 0$, so ergibt sich

$$x = \frac{1}{A \sin \alpha_0} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Somit ist die Bahnkurve gegeben durch

$$(I) \quad \sin \alpha = \sin \alpha_0 + Ay \sin \alpha_0,$$

$$(II) \quad \cos \alpha = \cos \alpha_0 - Ax \sin \alpha_0.$$

Eliminiert man α , so ergibt sich

$$\left(x - \frac{1}{A \operatorname{tg} \alpha_0}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2 \sin^2 \alpha_0},$$

d. h. die Bahn ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $\xi = \frac{1}{A \tan \alpha_0}$ und $\eta = -\frac{1}{A}$ hat, und dessen Radius $\rho = \frac{1}{A \sin \alpha_0}$ ist. Um die Bahn zu zeichnen, trägt man in O den Winkel α_0 gegen die Vertikale an und von O nach abwärts auf der Vertikalen die Strecke $1/A = OO'$. Dann zieht man $O'M \parallel OE$ und in O die Senkrechte zu OT , die $O'M$ in M schneiden möge; der Kreis um M mit dem Radius OM ist dann der gesuchte (Fig. 2).

Wie man sieht, ist die Bahn für positives A konkav gegen die Erdoberfläche, für negatives A konvex; für $A = 0$ geradlinig; setzt man in der Definitionsgleichung von A

$$A = C \frac{g - R c}{R T_0} \rho_0,$$

$A = 0$; so ergibt sich $c = -0,034$, d. h. ein Strahl verläuft geradlinig, wenn eine Temperaturabnahme von 34° pro 100 m mit der Höhe vorhanden ist (vgl. A. Wegener, a. a. O.).

Da für unsere Betrachtungen nur Strahlen berücksichtigt werden, die nahezu horizontal verlaufen, so ist in erster Annäherung $\sin \alpha_0 = 1$ zu setzen, d. h. die Krümmung ist für alle unter verschiedenen Winkeln α_0 (nahezu $= 90^\circ$) von O ausgehenden Strahlen die gleiche, nämlich $1/\rho = A$; also gleich dem Koeffizienten der Änderung des Brechungsindex.

Setzen wir in obiger Bahngleichung $\cos \alpha_0 = \varepsilon_0$ und $\cos \alpha = \varepsilon$, so ist, wenn ε_0 und ε sehr klein sind, $\sin \alpha_0 = 1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2}$ und $\sin \alpha = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$; dann ist die Bahngleichung

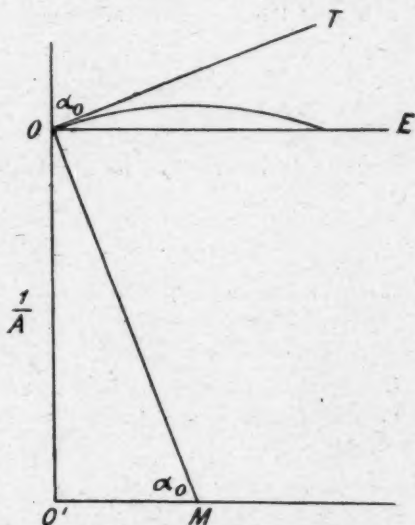


Fig. 2.

$$(I) \quad z^2 = z_0^2 - 2Ay,$$

$$(II) \quad z = z_0 - Ax.$$

Eliminiert man z aus beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$x^2 - \frac{2z_0}{A}x = -\frac{2}{A}y.$$

d. h. eine Parabel, deren Scheitel in

$$\xi_m = \frac{z_0}{A},$$

$$\eta_m = \frac{z_0^2}{2A}$$

liegt; transformiert man die Gleichung mittels der Beziehungen

$$\bar{x} = x - \xi_m,$$

$$\bar{y} = y - \eta_m,$$

so ergibt sich die bekannte Scheitelgleichung der Parabel

$$\bar{x}^2 = -\frac{2}{A}\bar{y}.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel ist bekanntlich gleich dem Parameter, also $r_s = 1/A$, wie oben bereits gefunden.

Ist A positiv, so ist der Scheitel ξ_m, η_m der Parabel zugleich der höchste Punkt der Bahn; für den Punkt, in dem die Bahn zum zweiten Male die Erdoberfläche schneidet, ergibt sich die Entfernung

$$x_0 = \frac{2z_0}{A},$$

in dem man in obiger Parallelgleichung $y = 0$ setzt. Bevor aber die weiteren Eigenschaften der Lichtbahn, insbesondere die Fälle verschiedener Schichten, untersucht werden, sei erst die Theorie für eine gekrümmte Erdoberfläche entwickelt.

B. Gekrümmte Erdoberfläche.

Wir hatten oben gefunden

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \frac{R}{r} [1 + A(r - R)],$$

wobei $r - R$ der jeweilige Abstand von der Erdoberfläche und α der Winkel mit der Normalen ist. An Stelle von α_0 und α

führen wir gleich wieder ε_0 und ε ein. Der Erdradius sei R , der Winkel, den r mit der ursprünglichen Richtung OM bildet, φ . Dann ist

$$(I) \quad r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = R(\varepsilon_0^2 - 2\lambda),$$

wenn $\lambda = 1 - AR$ gesetzt wird.

Ferner ist

$$(II) \quad \frac{dr}{r d\varphi} = \operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon.$$

Oder

$$d\varphi = \frac{dr}{r \cdot \varepsilon}.$$

Aus (I) folgt durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{r \varepsilon} = \frac{-2 d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\lambda}.$$

Also ist

$$d\varphi = \frac{-2 d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\lambda}.$$

Oder integriert

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left(\lg \frac{\varepsilon - \sqrt{2\lambda}}{\varepsilon + \sqrt{2\lambda}} - \lg \frac{\varepsilon_0 - \sqrt{2\lambda}}{\varepsilon_0 + \sqrt{2\lambda}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{2\lambda}} \lg \frac{\sqrt{2\lambda} - \varepsilon}{\sqrt{2\lambda} + \varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{2\lambda} + \varepsilon_0}{\sqrt{2\lambda} - \varepsilon_0},$$

wenn man die Konstante so bestimmt, daß $\varphi = 0$ für $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Entwickelt man nach einer Reihe und berücksichtigt man, da ε_0 und ε kleine Winkel sind, nur das erste Glied, so ergibt sich

$$\lambda \varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Somit ist die Bahngleichung (in Polarkoordinaten)

$$(I) \quad r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = R(\varepsilon_0^2 - 2\lambda),$$

$$(II) \quad \lambda \varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Der Lichtstrahl erreicht seinen *relativ zur Erdoberfläche* höchsten Punkt für $\varepsilon = 0$; dies ergibt

$$r_m = R \left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2\lambda} \right),$$

$$\varphi_m = -\frac{\varepsilon_0}{\lambda},$$

oder, wenn wir die Höhe über dem Erdboden mit $\eta_m = r_m - R$

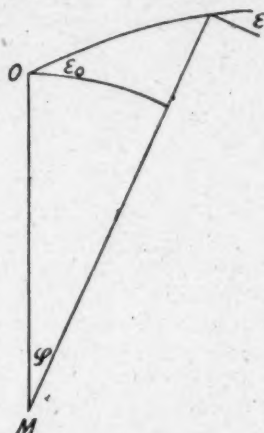


Fig. 3.

und den Abstand vom Koordinatenanfangspunkt mit $\xi_m = R q_m$ bezeichnen:

$$\xi_m = -\frac{R \varepsilon_0}{\lambda},$$

$$\eta_m = -\frac{R \varepsilon_0^2}{2\lambda},$$

oder wenn man setzt $-\frac{\lambda}{R} = A - \frac{1}{R} = \mu$

$$\xi_m = \frac{\varepsilon_0}{\mu},$$

$$\eta_m = \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu},$$

d. h. es gelten für das Maximum die gleichen Beziehungen wie bei ebener Erdoberfläche, wenn nur an Stelle von $A \mu = A - 1/R$ gesetzt wird. Ebenso ergibt sich für den Punkt, in dem der Strahl zum zweitenmal die Erdoberfläche schneidet, aus $r = R$ zunächst $\varepsilon = -\varepsilon_0$, und hieraus für den Abstand vom Koordinatenanfangspunkt

$$\xi_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\mu} = 2\xi_m,$$

ξ_0 , ebenso ξ_m und η_m sind nur dann positiv, für positives ε_0 , wenn μ positiv ist, d. h. wenn $A > 1/R$ oder die Krümmung des Strahles größer als die Erdkrümmung ist.

Die Analogie zu dem oben behandelten Fall legt die Vermutung nahe, daß auch in diesem Falle die Bahn eine Parabel ist, wenn man sie statt auf Polarkoordinaten auf ein System bezieht, in dem als Ordinate die Höhe über dem Erdboden η , als Abszisse die (krummlinige) Entfernung vom Anfangspunkt 0 gewählt wird. Setzt man dementsprechend

$$r - R = \eta,$$

$$Rq = \xi$$

und beachtet man, daß η klein gegen R ist, so ergibt sich als Bahngleichung

$$(I) \quad \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu\eta,$$

$$(II) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi,$$

oder

$$\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}\eta.$$

C. Übergang zum ursprünglichen Koordinatensystem.

In Fig. 4 ist $OP' = \xi$, $PP' = \eta$, $O'P = x$, $OO' = y$, $OM = P'M = R$; ferner ist x und ξ klein gegen R , y und η klein gegen x und ξ . Dann gelten die Beziehungen

$$(1) \quad \frac{x}{R+y} = \varphi = \frac{\xi}{R} \text{ oder } \xi = x \left(1 - \frac{y}{R}\right) \\ \text{oder } \xi = x.$$

$$(2) \quad (R + \eta)^2 = (R + y)^2 + x^2 \\ \text{oder} \quad \xi = y + \frac{x^2}{2R}.$$

Transformiert man unsere Parabelgleichung

$$\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu} \xi = -\frac{2}{\mu} \eta$$

mittels der beiden Gleichungen

$$x = \xi \\ y = \eta - \frac{x^2}{2R},$$

so ergibt sich, wenn man $\mu = A - 1/R$ berücksichtigt, wieder

$$x^2 - \frac{2\varepsilon_0}{A} x = -\frac{2}{A} y,$$

d. h. dieselbe Gleichung wie bei ebener Erdoberfläche! Diese können wir in Parameterdarstellung schreiben

$$\delta^2 = r_0^2 - 2Ay, \\ \delta = \varepsilon_0 - Ax.$$

Dabei ist jetzt δ der Winkel mit der Horizontalen im Punkte O , während in der transformierten Gleichung ε der Winkel mit dem jeweiligen Horizont ist.

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir auch auf folgendem Weg:

Die Bahnkurve geht durch den Ausgangspunkt P_0 , den Punkt, in dem relativ zur Erdoberfläche das Maximum erreicht wird, P_m , und den Punkt, in dem die Bahn zum zweiten Male die Erdoberfläche schneidet, P_0 . Die Koordinaten dieser drei Punkte sind:

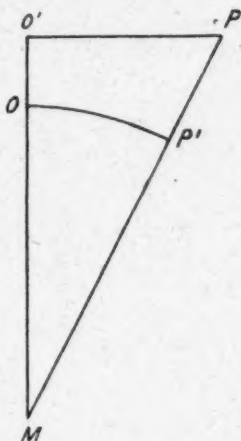


Fig. 4.

$$\begin{array}{lll}
 P & \xi = 0 & \eta = 0 \\
 P_m & \xi_m = \frac{\epsilon_0}{\mu} & \eta_m = \frac{\epsilon_0^2}{2\mu} \\
 P_0 & \xi_0 = \frac{2\epsilon_0}{\mu} & \eta_0 = 0,
 \end{array}$$

oder in den ursprünglichen Koordinaten

$$\begin{array}{lll}
 P & x = 0 & y = 0 \\
 P_m & x_m = \frac{\epsilon_0}{\mu} & y_m = \frac{\epsilon_0^2}{2\mu} - \frac{\epsilon_0^2}{2\mu^2 R} \\
 P_0 & x_0 = \frac{2\epsilon_0}{\mu} & y_0 = -\frac{4\epsilon_0^2}{2\mu^2 R}.
 \end{array}$$

Durch diese drei Punkte kann man ∞ viele Parabeln legen; wir wählen diejenige, deren Achse parallel der y -Achse ist:

$$(x - a)^2 = 2p(y - b).$$

Diese Gleichung muß für die drei Punkte erfüllt sein; also ist

$$\begin{array}{ll}
 (1) & a^2 = -2pb, \\
 (2) & \frac{\epsilon_0^2}{\mu^2} - 2\frac{\epsilon_0}{\mu}a + a^2 = 2p\left(\frac{\epsilon_0^2}{2\mu} - \frac{2\epsilon_0^2}{2\mu^2 R}\right) - 2pb, \\
 (3) & \frac{4\epsilon_0^2}{\mu^2} - 4\frac{\epsilon_0}{\mu}a + a^2 = 2p\left(-\frac{2\epsilon_0^2}{\mu^2 R}\right) - 2pb,
 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l}
 \frac{\epsilon_0}{\mu} - 2a = p \frac{\epsilon_0}{\mu R} (\mu R - 1) \\
 \frac{4\epsilon_0}{\mu} - 4a = -p \frac{4\epsilon_0}{\mu R}.
 \end{array}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{array}{l}
 p = -\frac{1}{A} \\
 a = \frac{\epsilon_0}{A} \\
 b = \frac{\epsilon_0^2}{2A}.
 \end{array}$$

d. h. die gesuchte Parabel ist $\left(x - \frac{\epsilon_0}{A}\right)^2 = -\frac{2}{A}\left(y - \frac{\epsilon_0^2}{2A}\right)$ oder $x^2 - \frac{2\epsilon_0}{A}x = -\frac{2}{A}y$, d. h. die oben gefundene.

Für die Lichtbahnen erhalten wir also zwei äquivalente Darstellungen:

1. System X, Y .

$$x^2 - \frac{2\epsilon_0}{A} x = -\frac{2}{A} y,$$

oder

$$(I) \quad \delta^2 = \epsilon_0^2 - 2Ay,$$

$$(II) \quad \delta = \epsilon_0 - Ax.$$

Hierbei sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten bezogen auf den Ausgangspunkt; ϵ_0 der Winkel gegen die Horizontale im Ausgangspunkt, A die die Dichteänderung bestimmende Konstante, und δ der Winkel gegen die x -Achse im Punkte xy .

2. System Ξ, H .

$$\xi^2 - \frac{2\epsilon_0}{\mu} \xi = -\frac{2}{\mu} \eta,$$

oder

$$(I) \quad \epsilon^2 = \epsilon_0^2 - 2\mu\eta,$$

$$(II) \quad \epsilon = \epsilon_0 - \mu\xi.$$

Hierbei sind ξ, η die Koordinaten relativ zur Erdoberfläche d. h. ξ der Abstand vom Ausgangspunkt und η die Höhe über dem Boden, ϵ_0 der Winkel gegen die Horizontale im Ausgangspunkt, $\mu = A - 1/R$, wobei R der Erdradius, und ϵ der Winkel gegen die jeweilige Horizontale im Punkte ξ, η .

Da es sich bei den im folgenden zu untersuchenden Fragen meist um solche handelt, bei denen die Lage der Lichtbahn relativ zur Erdoberfläche in Betracht kommt, so wird sich die Verwendung des zweiten Systems meist mehr empfehlen; aber man kann die für das erste System geltenden Resultate ohne weiteres auf das zweite übertragen, in dem man A durch μ ersetzt.

Zunächst seien noch einige einfache Beispiele für die Anwendung der beiden Systeme gegeben.

1. Wann verläuft ein Strahl geradlinig?

Lösung mit System 1.

Wenn der Strahl geradlinig verläuft, so ist der Winkel mit der x -Achse konstant; also $\delta = \epsilon_0$ oder $A = 0$.

Lösung mit System 2.

Wenn der Strahl geradlinig verläuft, so ist, wie aus Fig. 2 ersichtlich $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varphi = \varepsilon_0 + \xi/R$. Da aber $\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu \xi$, so muß sein $-\mu = 1/R$ oder $A - 1/R = -1/R$ oder $A = 0$.

2. Unter welchem Winkel muß ein Strahl ausgehen, damit er nach einem Punkte gelangt, der vom Ausgangspunkt die Entfernung E und die Höhe H über dem Boden hat?

Lösung mit System 1.

Die $E = \xi$ und $H = \eta$, so ist $x = E$ und $y = H - \frac{E^2}{2R}$.

Setzt man diese Werte in die Gleichung $x^2 - \frac{2\varepsilon_0}{A}x = -\frac{2}{A}y$ ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{E} + \frac{1}{2}\mu E.$$

Lösung mit System 2.

Setzt man $\varepsilon = \xi$ und $H = \eta$ in die Gleichung $\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}\eta$ ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{E} + \frac{1}{2}\mu E.$$

Hier erweist sich bereits die Lösung mit System 2 als bedeutend bequemer.

Fragt man nun z. B., unter welchem Winkel gegen die Horizontale dieser Strahl nach E, H gelangt, so ist die Lösung mittels System 2 die gegebene, da hier dieser Winkel unmittelbar vorkommt. Es ergibt sich sofort

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu E = \frac{H}{E} - \frac{1}{2}\mu E.$$

Wie man sieht, gelangt nach jedem gegebenen Punkt E, H von einem gegebenen Ausgangspunkt nur ein einziger Lichtstrahl.

4. Abbildung durch die gebogenen Lichtstrahlen.**A. Abbildung eines „Punktes“.**

Um zu finden, wo ein Beobachter in der Entfernung E vom Anfangspunkt das Bild dieses Anfangspunktes sieht, betrachten wir zwei Strahlen, die nach den Punkten in den Höhen H_1 und H_2 über dem Boden in der Entfernung E gehen; $H_2 - H_1$ entspreche dem Durchmesser der Pupille des Beobachters.

Lösung mit System 1.

Die Höhen von H_1 und H_2 über der Horizontalen in O seien y_1 und y_2 ; die Winkel gegen diese Horizontale in H_1 und H_2 sind:

$$\delta_1 = \frac{y_1}{E} - \frac{1}{2} A E$$

$$\delta_2 = \frac{y_2}{E} - \frac{1}{2} A E.$$

Zieht man in H_1 und H_2 die Tangenten gegen die Bahnkurven, so sind deren Gleichungen

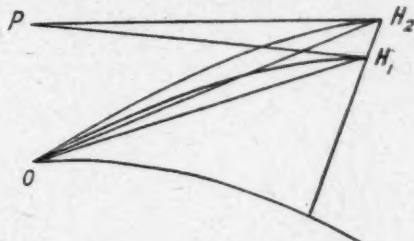


Fig. 5.

$$\frac{y_1 - y}{E - x} = \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{y_1}{E} - \frac{1}{2} A E = \delta_1,$$

$$\frac{y_2 - y}{E - x} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{y_2}{E} - \frac{1}{2} A E = \delta_2.$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten hat also die Koordinaten

$$x_s = 0$$

$$y_s = \frac{1}{2} A E^2,$$

also liegt das Bild P in der Höhe $\frac{1}{2} A E^2$ über dem Anfangspunkt. Zugleich sieht man, daß (für kleine Winkel, wie stets vorausgesetzt) die Bildhöhe unabhängig von den Höhen H_1 und H_2 ist; folglich schneiden sich *alle* von O (unter kleinem Winkel, ausgehenden Strahlen in P ; die Strahlen sind homozentrisch, und somit ist P tatsächlich ein „Bild“ von O .

Lösung mit System 2.

System 2 liefert die Winkel gegen die Horizontale im Punkte des Beobachters; es ist

$$\epsilon_1 = \frac{H_1}{E} - \frac{1}{2} \mu E,$$

$$\epsilon_2 = \frac{H_2}{E} - \frac{1}{2} \mu E.$$

Zwischen diesen Winkeln und denen gegen die Horizontale in O besteht die Beziehung

$$\epsilon_1 = \delta_1 + q = \delta_1 + \frac{E}{R} \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \delta_2 + \frac{E}{R}.$$

Also ergibt sich für obige Tangentengleichungen

$$\frac{y_1 - y}{E - x} = \delta_1 - \varepsilon_1 - \frac{E}{R} = \frac{H_1}{E} - \frac{1}{2} \mu E - \frac{E}{R},$$

$$\frac{y_2 - y}{E - x} = \delta_2 - \varepsilon_2 - \frac{E}{R} = \frac{H_2}{E} - \frac{1}{2} \mu E - \frac{E}{R}.$$

Oder für die Schnittpunktkoordinaten

$$x_s = 0$$

$$y_s = y_1 - H_1 + \frac{1}{2} \mu E^2 + \frac{E^2}{R},$$

$$= H_1 - \frac{E^2}{2R} - H_1 + \frac{1}{2} \mu E^2 + \frac{E^2}{R},$$

$$= \frac{1}{2} \mu E^2 + \frac{E^2}{2R},$$

$$= \frac{1}{2} A E^2 \quad \text{wie oben.}$$

Hier ist die Lösung mit System 1 bedeutend einfacher, wie zu erwarten, da die Tangenten nur im System 1 in einfacher Weise, nämlich als Gerade, sich darstellen.

Eine „Hebung“ tritt also stets dann ein, wenn A positiv ist, d. h., wenn die Temperaturabnahme mit der Höhe gleich oder kleiner als $3,4^\circ$ pro 100 m beträgt.

B. Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes.

Als „Gegenstand“ betrachten wir, da uns in erster Linie die Veränderungen in der Vertikalen interessieren, eine Strecke $h_2 - h_1$ z. B. einen Pfeil, dessen Spitze in der Höhe h_2 über dem Erdboden sich befindet, während sein anderes Ende in der Höhe h_1 ist. Der Beobachter befinde sich in $H_1 E$ wie oben.

Befindet sich der Ausgangspunkt der Lichtstrahlen nicht an der Erdoberfläche, sondern in der Höhe h über dem Boden so tritt in der Gleichung

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \frac{R}{r} [1 + A(r - R)],$$

$R + h$ an Stelle von R . Da in dem Ausdruck für λ h gegen R vernachlässigt werden kann, so ist die Bahngleichung in Polarkoordinaten

$$(I) \quad r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = (R + h)(\varepsilon_0^2 - 2\lambda).$$

$$(II) \quad \lambda \varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Setzt man wieder $r - R = \eta$ und $R \varphi = \xi$, so ergibt sich als Bahngleichung (System 2)

$$(I) \quad \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu(\eta - h),$$

$$(II) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi.$$

wie sich auch unmittelbar aus der Übertragung der für die ebene Erdoberfläche geltenden Beziehungen gibt. Ebenso folgt

$$(I) \quad \delta^2 = \varepsilon_0^2 - 2A(y - h) \left. \vphantom{\begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}} \right\} \text{System 1.}$$

$$(II) \quad \delta = \varepsilon_0 - Ax$$

Führt man die gleiche Betrachtung wie oben aus, so findet man für die Schnittpunktkoordinaten zweier Tangenten

$$x_s = 0$$

$$y_s = h + \frac{1}{2} A E^2,$$

d. h. das Bild erscheint um die Strecke $\frac{1}{2} A E^2$ über die Lage des Gegenstandes gehoben.

Das gleiche gilt für jeden Punkt des Gegenstandes ($h_2 - h_1$); wir erhalten also ein aufrechtes Bild, das ebenso groß als der Gegenstand ist und um $\frac{1}{2} A E$ gehoben erscheint (Hebung für positives, Senkung für negatives A).

5. Depression des Horizontes.

Befindet sich ein Beobachter in der Höhe H über dem Boden, so ist sein Gesichtsfeld bei geradliniger Fortpflanzung des Lichtes durch die Tangenten an die Erdkugel begrenzt; dabei ist angenähert die „Sichtweite“

$$E = \sqrt{2 R H}.$$

Ferner $\sphericalangle P' H P = d$, die Depression des Horizontes oder „geodätische Kimmtiefe“:

$$d = \frac{E}{R} = \sqrt{\frac{2 H}{R}}.$$

In Wirklichkeit aber verlaufen die Lichtstrahlen nicht geradlinig, sondern je nach der Dichteverteilung konkav oder konvex gegen die Erdoberfläche. Wenn wir fragen, wie groß unter diesen Umständen die „Sichtweite“ und die „Kimmtiefe“ sind, so haben wir nur in unserer Bahngleichung

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu\eta,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi,$$

$\eta = H$ und $\varepsilon_0 = 0$ zu setzen; dann ergibt sich

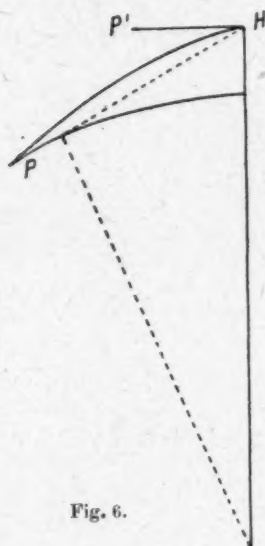


Fig. 6.

$$\varepsilon = \sqrt{-2\mu H},$$

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\mu} = \sqrt{\frac{2H}{-\mu}}.$$

Wie man sieht, ist ε und ξ positiv, solange μ negativ ist, d. h. solange die Krümmung des Strahles A kleiner als die Erdkrümmung $1/R$ ist.

Zwischen der geodätischen Kimm-tiefe d und der wahren Kimm-tiefe ε besteht die einfache Beziehung

$$d^2 - \varepsilon^2 = 2AH.$$

Bedenkt man, daß nach Abschnitt 1

$$\frac{v_0}{v} = 1 + C(\varphi_0 - \varphi) = 1 + AH,$$

wenn v_0 und v die absoluten Brechungsindizes am Boden und in der Höhe H sind, so kann man auch schreiben

$$d^2 - \varepsilon^2 = 2\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) \sim 2(v_0 - v),$$

d. h. man erhält die bei Pernter-Exner, S. 72 angegebene Formel.

Ebenso besteht zwischen den beiden Sichtweiten ε und ξ die einfache Beziehung

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{A}{2H}.$$

Solange also A positiv ist, wird der Horizont scheinbar gehoben und die Sichtweite vergrößert, für negatives A tritt Senkung und Verkleinerung der Sichtweite ein.

6. Zustandekommen mehrerer Bilder.

(Eigentliche Luftspiegelungen).

Bisher haben wir eine lineare Änderung der Luftdichte mit der Höhe, d. h. einen bestimmten positiven oder negativen Wert von A angenommen; hieraus erklärt sich die Depression

oder Erhebung des Horizontes, die Vergrößerung oder Verkleinerung der Sichtweite, die Hebung oder Senkung von Gegenständen ohne weiteres; eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Gegenstände tritt hierbei nicht ein.

Nun nehmen wir den immer noch sehr einfachen Fall, daß über einer Schicht, für die die lineare Änderung des Brechungsindex durch die Konstante A_1 gegeben ist, eine durch A_2 definierte Schicht lagert.

Der strahlenaussendende Gegenstand sei ein Punkt in der Höhe h , das Auge des Beobachters sei in der Höhe H über dem Boden; die Höhe der unteren Schicht sei S . Je nachdem nun h und H größer oder kleiner als S sind, sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $h < S, H > S$.

Es sei ε_0 der Winkel gegen die Horizontale an der Strahlenquelle, ε' derjenige an der Grenzfläche S , ε im Auge des Beobachters. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2 &= \varepsilon_0^2 - 2\mu_1(S - h), & \varepsilon^2 &= \varepsilon'^2 - 2\mu_2(H - S), \\ \varepsilon' &= \varepsilon_0 - \mu_1\xi_1, & \varepsilon &= \varepsilon' - \mu_2(E - \xi_1). \end{aligned}$$

wobei ξ_1 die Abszisse des Schnittpunktes des Strahles mit der Grenzfläche S ist¹⁾ (Fig. 7).

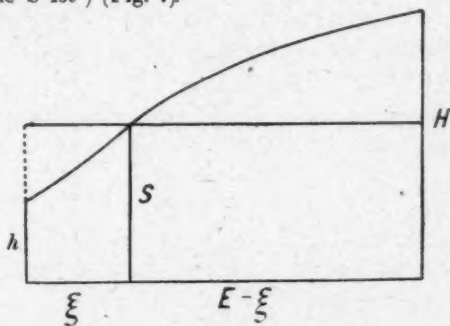


Fig. 7.

Aus den beiden Gleichungspaaren folgt einerseits

1) Von der Krümmung der Erdoberfläche können wir für die folgenden Betrachtungen absehen, da die Gleichungen in dem (krümmlichen) System 2 ebenso sind, wie sie in der Ebene für μ an Stelle von A wären.

$$\varepsilon' = \frac{S-h}{\xi} - \frac{1}{2} \mu_1 \xi,$$

andererseits

$$\varepsilon' = \frac{H-S}{E-\xi} + \frac{1}{2} \mu_2 (E-\xi),$$

oder für ξ die Gleichung dritten Grades:

$$(\mu_1 - \mu_2) \xi^3 + (2\mu_2 - \mu_1) E \xi^2 - (\mu_2 E^2 + 2(H-h)) \xi + 2E(S-h) = 0.$$

Es gibt also im allgemeinen drei Punkte ξ , in denen ein von dem Gegenstand nach dem Beobachter gehender Strahl die Grenzfläche S durchschneidet; somit erhält man, wenn man die drei Werte für ξ in die Gleichungen für ε_0 , ε' und ε einsetzt, im allgemeinen auch je drei verschiedene Werte für diese Winkel. *Also gibt es im allgemeinen drei verschiedene Strahlen, die von dem Gegenstand in das Auge des Beobachters gelangen.*

Da die rechnerische Behandlung dieses allgemeinen Falles sich ziemlich umständlich gestalten würde, beschränken wir uns darauf, einige besondere Fälle zu behandeln, für die die Verhältnisse besonders einfach liegen.

$$1. \text{ Sonderfall: } S-h = H-S; \mu_2 = -\mu_1.$$

Wir nehmen an, der Ausgangspunkt liege nun ebensoviel unter der Grenzfläche als das Auge über ihr; also $S-h = H-S$. Ferner sei $\mu_2 = -\mu_1$. Dann ist sicher $\xi = E/2$ eine Lösung der obigen Gleichung für ξ , da der diesem Wert entsprechende Strahl symmetrisch in beiden Medien verläuft. Die obige Gleichung für ξ vereinfacht sich unter obigen Annahmen zu:

$$2\mu_1 \xi^3 - 3\mu_1 E \xi^2 + (\mu_1 E^2 - 4(H-S)) \xi + 2E(H-S) = 0,$$

dividiert man mit $\xi - E/2$, so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$2\mu_1 \xi^2 - 2\mu_1 E \xi - 4(H-S) = 0,$$

oder

$$\xi = \frac{1}{2\mu_1} (\mu_1 E \pm \sqrt{\mu_1^2 E^2 + 8(H-S)\mu_1}).$$

Da ξ zwischen O und E liegen soll, so muß, wenn beide Wurzeln dieser Bedingung genügen sollen, μ_1 negativ sein, d. h. die Bahn muß im unteren Medium konvex gegen die Erdoberfläche sein (oder genauer, da diese gekrümmt, weniger stark gekrümmt als diese sein). Ferner muß sein (damit die Wurzel reell ist) $\frac{8(H-S)}{E^2} < |\mu_1|$.

Für die Winkel ε_0 , ε' und ε ergeben sich dann die folgenden Werte:

1. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_1 = \frac{1}{2} \sqrt{E^2 \mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

$$(\varepsilon')_1 = -\frac{\mu_1}{2} E$$

$$(\varepsilon)_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{E^2 \mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

2. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_2 = 2 \frac{H-S}{E} + \frac{\mu_1 E}{4}$$

$$(\varepsilon')_2 = 2 \frac{H-S}{E} - \frac{\mu_1 E}{4}$$

$$(\varepsilon)_2 = 2 \frac{H-S}{E} + \frac{\mu_1 E}{4}$$

3. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{E^2 \mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

$$(\varepsilon')_3 = -\frac{\mu_1}{2} E$$

$$(\varepsilon)_3 = \frac{1}{2} \sqrt{E^2 \mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

Ist der Gegenstand nicht ein Punkt, sondern z. B. eine vertikale Linie von der Höhe dh , so ist noch zu untersuchen, wo das Bild des oberen Endpunktes dieser Linie entsteht.

In dem obigen Gleichungssystem tritt an Stelle von h $h + dh$, während die anderen Beziehungen unverändert bleiben. Die Abszisse des Schnittpunktes mit der Grenzfläche S sei χ . Dann heißt die Gleichung für χ :

$$2\mu_1 \chi^3 - 3\mu_1 E \chi^2 + [\mu_1 E^2 - 4(H-S) + 2dh]\chi + 2E(S-h) - 2Edh = 0.$$

Da die Gleichung ohne die Glieder mit dh als eine Wurzel $\xi_2 = E/2$ besitzt, so schreiben wir die entsprechende Wurzel der vorliegenden Gleichung

$$\chi_2 = \xi_2 + \lambda_2,$$

ist λ klein, so können wir in χ_2^3 und χ_2^2 die Glieder mit λ_2^3 vernachlässigen und setzen:

$$\chi_2^2 = \xi_2^2 + 2\xi_2 \lambda_2 = \xi_2^2 + E\lambda_2,$$

$$\chi_2^3 = \xi_2^3 + 3\xi_2^2 \lambda_2 = \xi_2^3 + \frac{3}{4} E^2 \lambda_2.$$

Setzt man diese Werte oben ein, und berücksichtigt man das Verschwinden der Gleichung für ξ , so ergibt sich

$$\lambda_2 = \frac{-2E\mu_1 dh}{\mu_1^2 E^2 + 8(H-S)\mu_1}.$$

Oder die dem obigen 2. Strahl entsprechende eine Wurzel der Gleichung dritten Grades ist

$$\chi_2 = \frac{E}{2} - \frac{2E\mu_1}{w^2} dh,$$

wenn man $\sqrt{\mu^2 E^2 + 8(H-S)\mu_1}$ mit w bezeichnet.

Dividiert man nun die Gleichung dritten Grades mit $\chi - \frac{E}{2} + \frac{2E\mu_1}{w^2} dh$, so ergibt sich die Gleichung zweiten Grades:

$$2\mu_1\chi^2 - \left(2\mu_1 E + \frac{4E\mu_1^2}{w^2} dh\right)\chi + \frac{2E^2\mu_1^2}{w^2} dh + 2dh - 4(H-S) = 0.$$

Behandelt man diese Gleichung ebenso wie oben die Gleichung dritten Grades, in dem man setzt

$$\chi_1 = \xi_1 + \lambda_1 = \frac{E}{2} + \frac{w}{2\mu_1} + \lambda_1,$$

$$\chi_3 = \xi_3 + \lambda_3 = \frac{E}{2} - \frac{w}{2\mu_1} + \lambda_3;$$

so erhält man:

$$\lambda_1 = \frac{E\mu_1 - w}{w^2} dh, \quad \lambda_3 = \frac{E\mu_1 + w}{w^2} dh.$$

Somit sind die drei gesuchten Wurzeln

$$\chi_1 = \frac{E}{2} + \frac{w}{2\mu_1} + \frac{E\mu_1 - w}{w^2} dh = \xi_1 + \frac{2\mu_1\xi_3}{w^2} dh,$$

$$\chi_2 = \frac{E}{2} - \frac{2E\mu_1}{w^2} dh = \xi_2 - \frac{4\mu_1\xi_1}{w^2} dh,$$

$$\chi_3 = \frac{E}{2} - \frac{w}{2\mu_1} + \frac{E\mu_1 + w}{w^2} dh = \xi_3 + \frac{2\mu_1\xi_1}{w^2} dh.$$

Da μ_1 negativ, ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 positiv, ist $\chi_1 < \xi_1$, ebenso $\chi_3 < \xi_3$, dagegen $\chi_2 > \xi_2$.

Berechnet man aus der Gleichung

$$\eta = \frac{H-S}{E-\chi} + \frac{1}{2}\mu_1(E-\chi)$$

die drei Werte von η , so ergibt sich

$$(\eta)_1 = (\varepsilon)_1 - E \frac{\mu^2}{w^2} dh,$$

$$(\eta)_2 = (\varepsilon)_2 + \left(\frac{2E\mu^2}{w^2} - \frac{1}{E}\right) dh,$$

$$(\eta)_3 = (\varepsilon)_3 - E \frac{\mu^2}{w^2} dh.$$

Man sieht ohne weiteres, daß $(\eta)_1$ und $(\eta)_3$ kleiner als $(\epsilon)_1$ und $(\epsilon)_3$ sind; für $(\eta)_2$ kann man schreiben:

$$\begin{aligned} (\eta)_2 &= (\epsilon)_2 + \frac{2 E^2 \mu_1^2 - w^2}{E w^2} d h \\ &= (\epsilon)_2 + \frac{E^2 \mu_1^2 - 8 (H - S) \mu_1}{E w^2} d h, \end{aligned}$$

also ist $(\eta)_2 > (\epsilon)_2$, wenn μ_1 , wie vorausgesetzt, negativ ist.

Der Verlauf der Strahlen ist somit durch Fig. 8 dargestellt, wobei P_1 der Höhe h , P_2 der Höhe $h + dh$ entspricht. Die Bilder B_1 und B_3 sind somit aufrecht, das Bild B_2 verkehrt

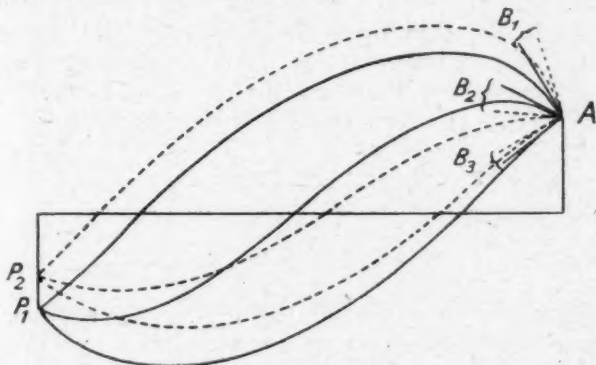


Fig. 8.

Die Bildgrößen selbst sind für die beiden aufrechten Bilder

$$B_1 = B_3 = E^2 \frac{\mu_1^2}{w^2} d h, \text{ für das verkehrte Bild:}$$

$$B_2 = \frac{E^2 \mu_1^2 - 8 (H - S) \mu_1}{E^2 \mu_1^2 + 8 (H - S) \mu_1} d h.$$

Da $(\epsilon)_1$ und $(\epsilon)_3$ entgegengesetzt gleich sind, so ist das Bild des Punktes P_1 in B_1 ebenso hoch über dem Horizont in A , als das in B_3 unter ihm; da $(\epsilon)_2$ negativ ist, so ist das Bild von P_1 in B_2 über dem Horizont in A , also näher an B_1 als an B_3 . Die Erscheinung entspricht somit vollkommen der bei Pernter-Exner S. 94 u. 95 abgebildeten und beschriebenen. (Figg. 15 u. 18.) In großer Entfernung [$E^2 \mu_1^2 \gg 8 (H - S) \mu_1$] erscheinen alle drei Bilder in ihrer natürlichen Größe (dh).

und zwar angenähert unter den Winkeln (für ihre Fußpunkte)
 $(\varepsilon)_1 = \frac{E\mu_1}{2}$, $(\varepsilon)_2 = \frac{E\mu_1}{4}$, $(\varepsilon)_3 = -\frac{E\mu_1}{2}$. Nähert sich der Beobachter, so rücken die Bilder zusammen.¹⁾

2. Sonderfall: $H = S$.

Als zweiten besonders einfachen Fall behandeln wir denjenigen, daß das Auge gerade in der Grenzfläche S der beiden Medien liegt. Dann heißt die Gleichung für ξ

$$(\mu_1 - \mu_2)\xi^3 + (2\mu_2 - \mu_1)\xi^2 E - [\mu_2 E^2 + 2(S - h)]\xi + 2E(S - h) = 0.$$

In diesem Fall kann ein Strahl ins Auge gelangen, der ganz in dem unteren Medium verläuft; er entspricht dem Strahl 3 des vorigen Falles. Für ihn ist $\xi_3 = E$; folglich reduziert sich unsere Gleichung dritten Grades durch Division mit $\xi - E$ auf die Gleichung zweiten Grades:

$$(\mu_1 - \mu_2)\xi^2 + \mu_2 E \xi - 2(S - h) = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\xi = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} [-\mu_2 E \pm \sqrt{\mu_2^2 E^2 + 8(S - h)(\mu_1 - \mu_2)}].$$

Da beide Wurzeln positiv sein sollten (ξ zwischen 0 und E), so muß sowohl ihre Summe als auch ihr Produkt positiv sein, also

$$\frac{-\mu_2 E}{\mu_1 - \mu_2} > 0 \text{ und } \frac{-4(S - h)}{\mu_1 - \mu_2} > 0,$$

oder

$$\mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ und } \mu_2 > 0$$

Bedingungen für positive ξ sind also: 1) $\mu_2 > 0$, d. h. der Strahl muß im oberen Medium stärker gekrümmt sein als die Erdoberfläche und zwar konkav gegen sie sein; 2) $\mu_1 < \mu_2$ der Strahl muß im unteren Medium, falls er konkav gegen die Erdoberfläche ist (μ_1 positiv) weniger stark als im oberen Medium gekrümmt sein; falls er konvex ist ($\mu_1 < 0$), kann seine Krümmung beliebig sein.

1) Nur für den Grenzfall, in dem die drei Werte von ξ den Wert $E/2$ annehmen, verlieren diese Betrachtungen ihre Gültigkeit, denn dann wäre z. B. λ_2 nicht mehr klein gegen ξ_3 , wie vorausgesetzt.

Für die Winkel ϵ_0 , ϵ' und ϵ ergeben sich die folgenden Werte:

1. Strahl.

$$(\epsilon_0)_1 = \frac{1}{4(\mu_1 - \mu_2)} [-\mu_2^2 E + (2\mu_1 - \mu_2)w]$$

$$(\epsilon')_1 = \frac{\mu_2}{4(\mu_1 - \mu_2)} [(2\mu_1 - \mu_2)E - w]$$

$$(\epsilon)_1 = -(\epsilon')_1$$

2. Strahl.

$$(\epsilon_0)_2 = \frac{1}{4(\mu_1 - \mu_2)} [-\mu_2^2 E - (2\mu_1 - \mu_2)w]$$

$$(\epsilon')_2 = \frac{\mu_2}{4(\mu_1 - \mu_2)} [(2\mu_1 - \mu_2)E + w]$$

$$(\epsilon)_2 = -(\epsilon')_2$$

3. Strahl.

$$(\epsilon_0)_3 = \frac{S-h}{e} + \frac{1}{2}\mu_1 E$$

$$(\epsilon')_3 = \frac{S-h}{e} + \frac{1}{2}\mu_2 E$$

wobei $\sqrt{\mu_2^2 E^2 + 8(S-h)(\mu_1 - \mu_2)}$ mit w bezeichnet ist.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, untersuchen wir den Sonderfall, daß im unteren Medium die Krümmung gleich der Erdkrümmung ist, also $\mu_1 = 0$. Dann vereinfachen sich unsere Gleichungen in folgender Weise:

$$\mu_2 \xi^3 - 2\mu_2 \xi^2 E + [\mu_2 E - 2(S-h)]\xi - 2E(S-h) = 0$$

$$\mu_2 \xi^3 - \mu_2 E \xi + 2(S-h) = 0$$

$$\xi_{1,2} = \frac{E}{2} \pm \frac{1}{2\mu_2} \sqrt{\mu_2^2 E^2 - 8(S-h)\mu_2} + \frac{E}{2} \pm \frac{w}{2\mu_2}$$

1. Strahl.

$$(\epsilon_0)_1 = \frac{1}{4}(\mu_2 E + w)$$

$$(\epsilon')_1 = (\epsilon_0)_1$$

$$(\epsilon)_1 = -(\epsilon')_1$$

2. Strahl.

$$(\epsilon_0)_2 = \frac{1}{4}(\mu_2 E - w)$$

$$(\epsilon')_2 = (\epsilon_0)_2$$

$$(\epsilon)_2 = -(\epsilon')_2$$

3. Strahl.

$$(\epsilon_0)_3 = \frac{(S-h)}{E}$$

$$(\epsilon')_3 = (\epsilon_0)_3$$

Der Verlauf der Strahlen ist in Fig. 9 dargestellt. Ist der Gegenstand nicht ein Punkt, sondern eine vertikale Strecke von der Höhe dh , so ist noch zu untersuchen, unter welchen Winkeln die vom oberen Endpunkt ausgehenden Strahlen ins Auge gelangen.

Da für den Strahl 3 $\chi = E/2$, wie sich ohne weiteres ergibt, unabhängig von h sich als Lösung findet, so ergeben sich für den 1. und 2. Strahl die Werte:

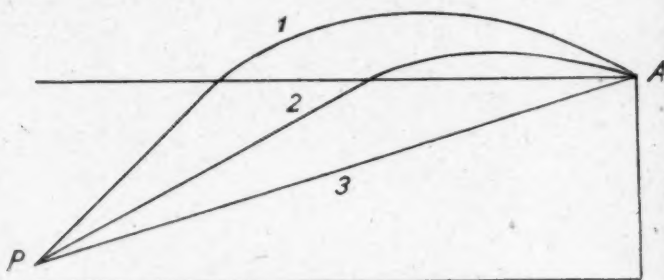


Fig. 9.

$$(\eta_0)_1 = \frac{1}{4}(\mu_2 E + w') \quad (\eta_0)_2 = \frac{1}{4}(\mu_2 E - w')$$

$$(\eta')_1 = (\eta_0)_1 \quad (\eta')_2 = (\eta_0)_2$$

$$(\eta)_1 = -(\eta')_1 \quad (\eta)_2 = -(\eta')_2,$$

wobei $w' = \sqrt{E^2 \mu_2^2 - 8(S - h - dh)\mu_2}$ ist.

Somit ist für positives dh

$$(\eta_0)_1 > (\epsilon_0)_1 \text{ und zwar annähernd } (\eta_0)_1 = (\epsilon_0)_1 + \frac{dh\mu_2}{w'}$$

$$(\eta_0)_2 < (\epsilon_0)_2 \text{ und zwar annähernd } (\eta_0)_2 = (\epsilon_0)_2 - \frac{dh\mu_2}{w'}$$

Entsprechend:

$$(\eta)_1 < (\epsilon)_1 \text{ und } (\eta)_2 > (\epsilon)_2.$$

Somit ist das von den Strahlen 1 gelieferte Bild aufrecht, das von den Strahlen 2 gelieferte verkehrt; der Verlauf der Strahlen ist in Fig. 10 dargestellt. Die Strahlen 3 liefern ein aufrechtes Bild. Nähert man sich aus großer Entfernung, so nähern sich die Bilder B_1 und B_2 immer mehr und mehr, bis die beiden unteren Bildpunkte zusammenstoßen; dies ist der Fall für $\xi_1 = \xi_2 = \frac{E}{2}$ oder $(\epsilon_0)_1 = (\epsilon_0)_2 = \frac{\mu_2 E}{4}$, wenn nämlich E so klein geworden ist, daß w verschwindet. Nähert man sich noch mehr, so entstehen vom unteren Punkt keine reellen Bilder mehr.

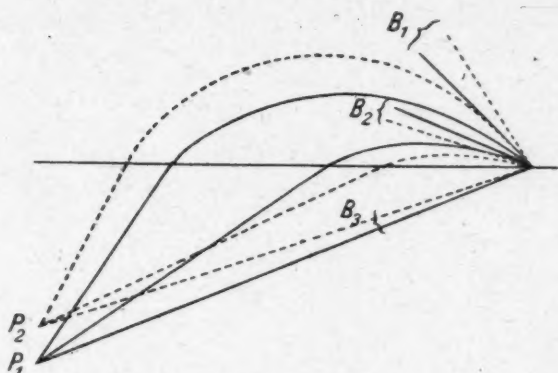


Fig. 10.

2. Fall: $h < S$, $H < S$.

Es sei ε_0 der Winkel gegen die Horizontale an der Strahlenquelle, ε' der erste Winkel an der Grenzfläche, ε'' der zweite Winkel an der Grenzfläche, ε im Auge des Beobachters; ξ_1 sei wieder die Abszisse des Schnittpunktes des Strahles mit der Grenzfläche S , ξ_2 diejenige des zweiten Schnittpunktes. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2 &= \varepsilon_0^2 - 2\mu_1(S-h) & \varepsilon''^2 &= \varepsilon'^2 \\ \varepsilon' &= \varepsilon_0 - \mu_1\xi_1 & \varepsilon'' &= \varepsilon' - \mu_2(\xi_2 - \xi_1) \\ \varepsilon^2 &= \varepsilon''^2 - 2\mu_1(H-S) \\ \varepsilon &= \varepsilon'' - \mu_1(H - \xi_2). \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen ε_0 , ε' , ε'' und ε , sowie ξ_2 , so erhält man für ξ eine Gleichung vierten Grades; es können also im allgemeinen vier verschiedene Bilder entstehen! Dazu kommt noch das Bild, das durch die im unteren Medium allein von h nach H verlaufenden Strahlen entsteht.

Die aus der Elimination von ε_0 , ε' , ε'' , ε und ξ_2 sich ergebende Gleichung vierten Grades lautet:

$$\begin{aligned} &\mu_1(\mu_2 - \mu_1)(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^4 - \mu_1\mu_2(3\mu_2 - 2\mu_1)E\xi_1^3 \\ &- [2(\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^2)(S-h) + 2\mu_2^2(S-H) - \mu_1\mu_2^2E^2]\xi_1^2 \\ &+ 2\mu_2(\mu_2 - 2\mu_1)(S-h)E\xi_1 - (\mu_2 - \mu_1)4(S-h)^2 = 0. \end{aligned}$$

Zur näheren Untersuchung wählen wir den Spezialfall $h = H$; für diesen reduziert sich die Gleichung auf die folgende:

$$\begin{aligned} \mu_1(\mu_2 - \mu_1)(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^4 - \mu_1\mu_2(3\mu_2 + 2\mu_1)E\xi_1^3 \\ - [4(\mu_2 - \mu_1)^2(S - h) - \mu_1\mu_2^2E^2]\xi_1^2 \\ + 2\mu_2(\mu_2 - 2\mu_1)(S - h)E\xi_1 - (\mu_2 - \mu_1)4(S - h)^2 = 0. \end{aligned}$$

In diesem Falle werden wir sicher eine Lösung dann erhalten, wenn der Strahl symmetrisch zur Halbierungslinie der Strecke E verläuft, wenn also $\xi_1 = E - \xi_2$. Dann ist:

$$\epsilon' = \frac{S - h}{\xi_1} - \frac{\mu_1}{2}\xi_1 = \frac{\mu_2}{2}(E - 2\xi_1)$$

oder

$$(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^2 - \mu_2E\xi_1 + 2(S - h) = 0.$$

zwei Wurzeln unserer Gleichung vierten Grades sind somit

$$(\xi_1)_1 = \frac{1}{2(2\mu_2 - \mu_1)} [\mu_2E + \sqrt{\mu_2^2E^2 - 8(S - h)(2\mu_2 - \mu_1)}],$$

$$(\xi_1)_2 = \frac{1}{2(2\mu_2 - \mu_1)} [\mu_2E - \sqrt{\mu_2^2E^2 - 8(S - h)(2\mu_2 - \mu_1)}].$$

Dividiert man die obige Gleichung vierten Grades durch die Gleichung zweiten Grades, so erhält man die neue Gleichung zweiten Grades:

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_1)\xi_1^2 - \mu_1\mu_2E\xi_1 - 2(\mu_2 - \mu_1)(S - h) = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$(\xi_1)_3 = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \mu_1)} [-\mu_1\mu_2E + \sqrt{\mu_1^2\mu_2^2E^2 + 8(S - h)\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}],$$

$$(\xi_1)_4 = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \mu_1)} [-\mu_1\mu_2E - \sqrt{\mu_1^2\mu_2^2E^2 + 8(S - h)\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}].$$

Zu dieser Gleichung gelangt man übrigens auch durch folgende Überlegung:

Wenn μ_1 negativ ist, also die Bahn im unteren Medium konvex gegen die Erdoberfläche, oder richtiger, weniger stark gekrümmt ist als diese, so kann der Strahl den Ausgangspunkt unter einem negativen Winkel ϵ_0 verlassen, also zunächst nach abwärts gehen; dann erreicht er ein Minimum, um dann bis zur Grenzfläche anzusteigen. Im zweiten Medium beschreibt er den in bezug auf sein Maximum symmetrischen Parabelbogen (Fig. 11), dann im ersten Medium einen Parabelbogen, der kein Minimum mehr besitzt. Ebensogut ist aber auch ein

Strahlenverlauf möglich, der aus dem eben geschilderten durch Vertauschung von Gegenstand und Auge entsteht, also zu ihm in bezug auf $E/2$ symmetrisch liegt.

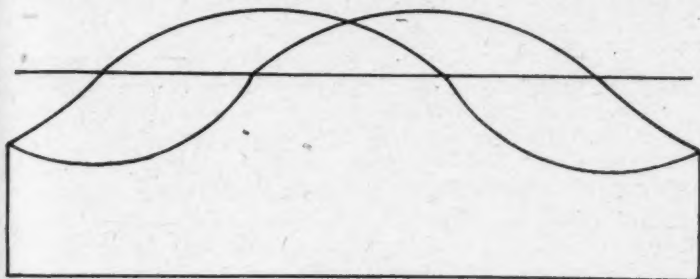


Fig. 11.

Wegen dieser Symmetrieverhältnisse müssen die Beziehungen bestehen:

$$(\xi_1)_3 = E - (\xi_2)_4 \quad \text{und} \quad (\xi_1)_4 = E - (\xi_2)_3,$$

oder, wenn wir $(\xi_1)_3 = p$, $(\xi_1)_4 = q$ setzen:

$$\frac{S-h}{p} - \frac{\mu_1}{2} p = \frac{\mu_2}{2} (E - p - q),$$

$$\frac{S-h}{q} - \frac{\mu_1}{2} q = \frac{\mu_2}{2} (E - p - q),$$

oder

$$2(S-h) - \mu_1 p^2 = \mu_2 Ep - \mu_2 p^2 - \mu_2 pq,$$

$$2(S-h) - \mu_1 q^2 = \mu_2 Eq - \mu_2 pq - \mu_2 q^2,$$

woraus sich leicht ergibt

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_1)p^2 - \mu_1\mu_2 Ep - 2(\mu_2 - \mu_1)(S-h) = 0,$$

d. h. wir erhalten die gleiche Gleichung für den dritten und vierten Strahl wie oben.

Man kann nun die Untersuchung wie oben weiterführen, insbesondere die Lage der Bilder dadurch untersuchen, daß man den Verlauf der von dem in der Höhe $h + dh$ gelegenen Punkt ausgehenden Strahlen untersucht. Doch werden die Rechnungen sehr langwierig, wenn man sich nicht auf Sonderfälle beschränkt, so daß hier auf die Wiedergabe verzichtet sein soll.

Als Resultat ergibt sich, daß je zwei der auftretenden Bilder aufrecht, die anderen zwei verkehrt sind; zu diesen vier Bildern kommt dann noch das durch die ganz im unteren Medium verlaufenden Strahlen entstehende Bild, das natürlich aufrecht ist.

Wenn im unteren Medium die Krümmung der Strahlen gleich der Erdkrümmung, also $\mu_1 = 0$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung vierten Grades zu

$$2\mu_2^2\xi_1^2 - \mu_2 E\xi_1 + 2(S-h) = 0.$$

Die beiden Wurzeln sind:

$$(\xi_1)_1 = \frac{E}{4} + \frac{1}{4\mu_2} \sqrt{E^2\mu_2^2 - 16(S-h)\mu_2},$$

$$(\xi_1)_2 = \frac{E}{4} - \frac{1}{4\mu_2} \sqrt{E^2\mu_2^2 - 16(S-h)\mu_2},$$

d. h. in diesem Falle treten nur die zwei ersten Strahlen außer dem direkten Strahle auf.

Damit sowohl $(\xi_1)_1$, als auch $(\xi_1)_2$ positiv werden, muß μ_2 positiv sein, d. h. der Strahl im oberen Medium muß stärker gekrümmt sein als die Erdoberfläche.

Auf andere mögliche Sonderfälle sei nicht eingegangen.

3. Fall: $h > S$; $H < S$.

Dieser Fall entspricht vollständig dem ersten Fall, bei dem $h < S$ und $H > S$; es gelten dieselben Gleichungen für die Winkel ϵ_0 , ϵ' und ϵ ; nur sind μ_2 und μ_1 vertauscht, folglich auch die gleiche Gleichung dritten Grades für ξ , ebenfalls mit vertauschtem μ_1 und μ_2 . Also gibt es auch hier im allgemeinen drei verschiedene Strahlen, die ins Auge des Beobachters gelangen.

Die Betrachtungen sind somit die gleichen wie oben, so daß auf ihre Wiederholung verzichtet werden kann.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Aus der Annahme einer linearen Änderung der Temperatur mit der Höhe ergibt sich durch Integration der „Differentialgleichung der Statik der Atmosphäre“ das Gesetz, daß die Dichte der Luft sich in erster Annäherung linear mit der Höhe ändert, und zwar nimmt sie ab, solange die Temperatur ent-

weder mit der Höhe zunimmt, oder konstant bleibt oder um weniger als $3,4^\circ$ pro 100 m abnimmt.

2. Die Änderung des Brechungsindex mit der Höhe wird zunächst für den Fall einer ebenen Erdoberfläche untersucht; bezeichnet man den Winkel, den der Strahl an der Erdoberfläche mit der Vertikalen bildet, mit α_0 , denjenigen den er in der Höhe y über dem Boden mit ihr bildet, mit α , so ergibt sich:

$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = 1 + Ay$, d. h. es ändert sich der Sinus des Brechungswinkels in erster Annäherung linear mit der Höhe; bei gekrümmter Erdoberfläche tritt noch der Faktor R/r hinzu, wobei R der Erdradius, und r die Entfernung des jeweiligen Punktes vom Erdmittelpunkt ist.

3. Als Bahngleichung der Lichtstrahlen ergibt sich bei ebener Erdoberfläche ein Kreis, oder wenn man berücksichtigt, daß alle Winkel gegen die Horizontale klein sind, eine Parabel. Bei gekrümmter Erdoberfläche ergibt sich gleichfalls eine Parabel, sowohl wenn man sie auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezieht, das seinen Nullpunkt im Ausgangspunkt der Strahlen hat und dessen X-Achse der Horizont in diesem Punkte ist, als auch in einem Koordinatensystem mit dem gleichen Nullpunkt, in dem als Ordinate die jeweilige Höhe über der Erdoberfläche, als Abszisse der (krummlinige) Abstand vom Anfangspunkte gewählt wird. Die beiden Darstellungen sind einander äquivalent, je nach der Art der behandelten Frage bietet aber die eine oder die andere den Vorzug einfacherer Rechnung, wie an einigen Beispielen gezeigt wird.

4. In besonders einfacher Weise läßt sich die „Depression des Horizontes“ untersuchen und lassen sich die Formeln für die Beziehungen zwischen wahrer und geodätischer Sichtweite und Kimmtiefe ableiten.

5. Um zu einer Deutung des Zustandekommens mehrerer Bilder zu kommen, braucht man nur anzunehmen, daß über einer Schicht, in der sich der Brechungsindex wie bisher, linear ändert, eine zweite Schicht gelagert ist, in der die Änderung gleichfalls linear ist, nur die Änderungskonstante einen anderen Wert besitzt. Je nach der Lage des Auges und des Gegenstandes zu der Höhe der Schicht sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, die im Einzelnen diskutiert werden. Befinden

sich Gegenstand und Auge nicht in der gleichen Schicht, so entstehen im allgemeinen drei Bilder, von denen zwei aufrecht, das dritte aber verkehrt ist, befinden sich Auge und Gegenstand in der gleichen Schicht, so können sogar fünf Bilder, drei aufrechte und zwei verkehrte, entstehen. An passend gewählten Sonderfällen wird der Verlauf der einzelnen Strahlen, die Lage und Größe der entstehenden Bilder usw. im Einzelnen untersucht und gezeigt, inwieweit das Resultat der Rechnung mit den Beobachtungen in Übereinstimmung steht.

(Eingegangen 14. Juni 1919.)

**3. Über die Dielektrizitätskonstante
einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine
(mit einem Anhang über Bernstein);
von Robert Fellinger.**

Die Untersuchungen, deren Resultate im folgenden mitgeteilt werden sollen, sind bereits in der Zeit vom November 1913 bis Juli 1914 ausgeführt worden. Durch den Krieg wurde die Veröffentlichung bisher hinausgeschoben.

Veranlassung zu der Arbeit bot die Frage, ob es etwa möglich sei, auf synthetischem Wege hergestellte Edelsteine, die mit den entsprechenden natürlichen Steinen sowohl chemisch als physikalisch als auch kristallographisch vollkommen übereinstimmend gefunden wurden, mit Hilfe ihres bisher noch nicht untersuchten dielektrischen Verhaltens von ihren natürlichen Vorbildern zu unterscheiden.

Es sei gleich gesagt: eine solche Unterscheidungsmöglichkeit zwischen echten und synthetischen Steinen hat die vorliegende Arbeit nicht gebracht. Ihr Ergebnis beschränkt sich auf die erstmalige Feststellung der Dielektrizitätskonstanten des echten und synthetischen, edlen Korunds (Rubin und Leukosaphir) sowie auf die Bestätigung früher gefundener Werte der Dielektrizitätskonstanten von Topas und Beryll und nebenbei Bernstein.

Die Untersuchungen wurden nach der vom Verfasser bereits früher auf Kristalle angewandten ¹⁾, von Graetz und Fomm ²⁾ stammenden Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im homogenen elektrischen Felde ausgeführt.

1) R. Fellinger, „Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen im homogenen elektrischen Felde“. Dissertation München 1899; Wied. Ann. 7. S. 333—357. 1902.

2) L. Graetz u. L. Fomm, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. 23. S. 275. 1893; Wied. Ann. 53. S. 85. 1894.

Hierbei werden aus dem zu untersuchenden Kristall geschnittene, optisch genau orientierte, möglichst dünne, kreisrunde Scheibchen (als Näherungsform von Rotationsellipsoiden gedacht) zwischen den vertikal stehenden Platten eines Kondensators in bestimmter Weise aufgehängt. Zwischen den mit einer Wechselstromquelle verbundenen Kondensatorplatten wird ein Wechselfeld erregt, unter dessen Einwirkung das zu untersuchende Kristallscheibchen ein Drehungsmoment erhält, dem die Torsion des Aufhängefadens entgegenwirkt. Die Drehung wird mit Spiegel und Skala abgelesen.

Wegen der Theorie darf auf die erwähnte, frühere Arbeit des Verfassers hingewiesen werden.

Zur Untersuchung eines optisch einachsigen Kristalles genügt eine zylindrische Scheibe, deren Rotationsachse senkrecht zur optischen Achse steht, oder, wie man gewöhnlich sagt: eine Scheibe parallel zur optischen Achse.

Zur Untersuchung eines optisch zweiachsigen Kristalls sind zwei, aus ein und demselben Kristall geschnittene, zylindrische Scheiben erforderlich, deren Rotationsachsen in zwei verschiedenen optischen Hauptrichtungen liegen.

Einige Schwierigkeit bereitete die Beschaffung des zum Teil kostbaren Rohmaterials, das für die optisch genau orientiert herzustellenden Kristallschnitte geeignet sein mußte. Auf die Herkunft des Rohmaterials wird bei der Behandlung der einzelnen Objekte eingegangen.

Die Ausführung der Kristallpräparate lag ausschließlich in den bewährten Händen der Hrrn. Dr. Steeg und Reuter, Optisches Institut, Homburg v. d. Höhe, deren präzise Arbeit größte Anerkennung verdient.

Die optische Untersuchung bzw. Kontrolle der Kristallschnitte wurde mit einem Mikroskop von Carl Zeiß, Jena und mittelst eines Dichroskops von R. Fuess, Berlin-Steglitz, ausgeführt. Einige Feststellungen, namentlich an den Präparaten aus synthetischem Material, wurden im Mineralogischen Institut zu München unter gütiger Mithilfe des Hr. Prof. Dr. Weinschenk im Juli 1913 vorgenommen.

Zur Ausmessung der Kristallscheibchen diente ein Zeißsches Meß-Mikroskop, Modell A, das die Feststellung von Durchmesser und Dicke der Scheibchen auf 0,01 mm genau ermöglichte.

Der für die dielektrischen Untersuchungen verwendete Luftkondensator wurde von dem Universitätsmechaniker Walter Oehmke, Berlin, nach Angabe angefertigt. Er bestand aus zwei gegeneinander horizontal verschiebbaren, vertikalen Messingplatten von 15 cm Durchmesser, die in einem Mahagoni-Glaskasten von 50 cm Länge und je 25 cm Höhe und Tiefe, den Anforderungen entsprechend gut isoliert, untergebracht waren.

Die von den Kondensatorplatten abgehenden Stromzuleitungen führten zunächst zu einem zweipoligen Umschalter, durch den die Platten nach Bedarf zur Erde abgeleitet oder mit der Stromquelle verbunden werden konnten. Als Arbeitsstrom wurde sinusoidaler Wechselstrom verwendet, dessen Spannung bei sämtlichen Messungen gleichmäßig auf 142 Volt gehalten wurde. Der Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer, ein Hitzdrahtvoltmeter sowie sonstiges Meßgerät waren von Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, leihweise überlassen worden.

Das zwischen den Kondensatorplatten an einem etwa 7 cm langen, entsprechend vorbereiteten Kokonfaden hängende System bestand aus einem Galvanometerspiegel von 0,8 cm Durchmesser, der auf einem etwa 17 cm langen und 0,05 cm dicken Glasstab angebracht war; am unteren Ende des Glasstabs wurde das jeweilig zu untersuchende Kristallscheibchen genau orientiert und unter einem Winkel von 45° gegen die Spiegelfläche verdreht, mittelst eines Wachströpfchens stumpf befestigt. Das ganze hängende System, ohne Präparat, hatte ein Gewicht von 0,133 g.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß bei den einzelnen Messungen stets die Temperatur außerhalb und innerhalb des geschlossenen Kondensatorkastens festgestellt wurde, um die durch eine etwaige Temperaturänderung während der Messung bedingte Fehlerquelle auszuschalten. Auch wurde die Luftfeuchtigkeit in dem Arbeitsraum regelmäßig kontrolliert, wozu ein Präzisions-Hygrometer von Otto Böhne Nachf., Berlin, diente.

Jedes zu untersuchende Kristallscheibchen wurde einer Reihe von Messungen unterzogen, die auch wenn sie von Anfang an gute Übereinstimmung zeigten, wiederholt und zu verschiedenen Tageszeiten ausgeführt wurden.

Zur Kontrolle der Methode wurden zunächst schon anderweitig bestimmte, bekannte Dielektrizitätskonstante, und zwar

von Topas (optisch zweiachsig), Beryll (optisch einachsig) und nebenbei Bernstein (amorph) ermittelt.

Die Ergebnisse der Messungen sind aus dem folgenden zu entnehmen.

Topas, von Mino, Japan.

Rhombisch bipyramidal (Groth). — Rhombisch holoëdrisch (Voigt).
Doppelbrechung positiv.

a zweite Mittellinie (stumpfer Achsenwinkel), b optische Normale,
c erste Mittellinie (spitzer Achsenwinkel).

Das Rohmaterial, Topas wasserhell, von Mino, Japan, wurde von Dr. F. Krantz, Bonn, geliefert. Es war ein klares Kristallstück von 23 g Gewicht, wovon zur Herstellung der beiden erforderlichen Scheibchen 13,2 verschliffen wurden.

Es wurden zwei möglichst gleiche Scheibchen von je 12 mm Durchmesser und 1 mm Dicke hergestellt, von denen das eine \parallel zur Achsenebene, das andere \perp zur ersten Mittellinie geschnitten wurde.

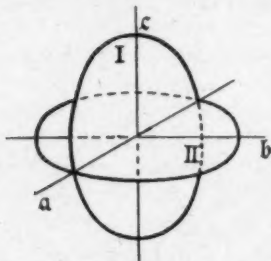


Fig. 1.

Die Lage der beiden Schnitte im Kristall ist aus nebenstehender Fig. 1 zu ersehen. Die Scheibe I enthält die beiden Mittellinien a und c; die Scheibe II enthält die zweite Mittellinie a und die optische Normale b.

Vor dem Eingehen auf die Meßresultate muß einiger Eigentümlichkeiten des Topases in elektrischer Beziehung gedacht werden.

Der Topas eignet sich als Probeobjekt für die Untersuchung im homogenen Felde besonders gut, da er ungefähr alle unbequemen Eigenschaften hat, auf deren Ausschaltung man vor Beginn der eigentlichen Messungen bedacht sein muß. Sowohl Reibungselektrizität als auch Pyroelektrizität treten im Topas in hervorragender Weise auf, so daß er, neben Turmalin, man könnte sagen das nervöseste Versuchsobjekt im elektrischen Wechselfelde ist, das man sich denken kann.

Beim Befestigen eines Topasscheibchens am unteren Ende der Aufhängevorrichtung, wobei das zur Befestigung dienende

Wachströpfchen durch ein darüber gehaltenes, erhitztes Eisen für einen Augenblick zum Schmelzen gebracht wird, kann man mit Sicherheit auf das Auftreten der Pyroelektrizität und beim Reinigen des Topasscheibchens auf das Erscheinen der Reibungselektrizität rechnen. In diesem Zustande des Präparates ist an eine Messung im Kondensator nicht zu denken, da dasselbe sich beim Einschalten des Stromes senkrecht zu den Kondensatorplatten stellt, so daß das Bild der Skala schnell aus dem Ablesespiegel entschwindet.

Solche starke Ladungserscheinungen machten sich namentlich bei dem \parallel zur Achsenebene geschnittenen Topasscheibchen geltend, und bei diesem am stärksten in der Richtung der ersten Mittellinie c ; nach Mack¹⁾ soll in einer gegen diese geneigten Richtung die pyroelektrische Achse liegen.

Die Ladungserscheinungen waren auch nach 24 Stunden noch deutlich vorhanden. Danach wurde erst nach 3 Tagen wieder kontrolliert, mit dem Ergebnis, daß sich keinerlei Ladungserscheinungen mehr nachweisen ließen. Somit kann man sagen, daß 4×24 Stunden genügten, um beim Topas auch in der empfindlichsten Richtung einwandfreie, gleichmäßige Ausschläge zu erzielen.

Bauer²⁾ gibt an, daß man beim Topas noch nach 32 Stunden nach dem Reiben die Erregung nachweisen kann, und daß erhitze Topase manchmal bis 30 Stunden elektrisch bleiben, auch noch nachdem völlige Erkaltung eingetreten ist.

Nach dem Gesagten ist es klar, daß mit den beiden Topasscheibchen lange Reihen von Messungen vorgenommen werden mußten, aus denen nur die unter durchaus einwandfreien Verhältnissen erzielten Ausschläge zur schließlichen Errechnung der Ausschlagsmittelwerte für die drei Richtungen, a , b und c verwendet wurden.

Die Ergebnisse der Messungen sind folgende:

Topasscheibe I (\parallel zur Achsenebene)	
Dicke	0,98 mm
Durchmesser	12,18 mm
Gewicht	0,4059 g.

1) K. Mack, „Über die Pyroelektrizität des brasilianischen Topases“. Wied. Ann. 28. S. 153—167. 1886.

2) M. Bauer, Edelsteinkunde. S. 83 u. 413. 1909.

Für die Kirchhoffschen Achsenverhältnis-Konstanten¹⁾ ergaben sich die Werte: $A_1 = 11,127$, $B_1 = 0,71984$. Die Scheibe wurde zuerst in der aus Fig. 2 ersichtlichen Lage aufgehängt, so daß in der Richtung nach a gemessen werden konnte. Der bei dem für sämtliche Messungen konstanten Skalenabstand von 295 cm abgelesene Ausschlag betrug im Durchschnitt aus 50 verlässlichen Messungen $s_{1a} = 67,24$ mm, oder der Ausschlagswinkel $\delta_{1a} = 0^\circ 39' 11''$. In zweiter Aufhängung (vgl. Fig. 3) ergab sich aus über 40 gleichmäßigen Ausschlägen: $s_{1c} = 69,62$ mm oder der Ausschlagswinkel $\delta_{1c} = 0^\circ 40' 33''$.

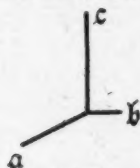


Fig. 2.

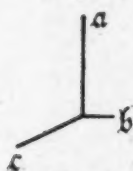


Fig. 3.

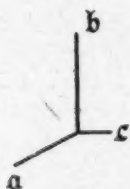


Fig. 4.

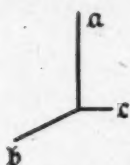


Fig. 5.

Für die Topasscheibe II (\perp zur Mittel-
linie c) ergaben sich folgende Werte:

Dicke	1,00 mm
Durchmesser	12,19 mm
Gewicht	0,4122 g

$$A_{II} = 11,1015, \quad B_{II} = 0,73256.$$

In erster Aufhängung (vgl. Fig. 4):

$$s_{IIa} = 68 \text{ mm}, \quad \delta_{IIa} = 0^\circ 39' 42'',$$

in zweiter Aufhängung (vgl. Fig. 5):

$$s_{IIb} = 72 \text{ mm}, \quad \delta_{IIb} = 0^\circ 41' 57''.$$

Die Elektrisierungszahlen η_a , η_b , η_c , die mit den Dielektrizitätskonstanten in dem Zusammenhang

$\epsilon_a = 1 + 4\pi\eta_a$, $\epsilon_b = 1 + 4\pi\eta_b$, $\epsilon_c = 1 + 4\pi\eta_c$ stehen, wurden nach den aus der Theorie bekannten Formeln²⁾ errechnet und ergaben sich wie folgt:

Aus Scheibe I	$\eta_{aI} = 0,41788$,
Aus Scheibe II	$\eta_{aII} = 0,42025$,
(Unterschied $\eta_{aII} - \eta_{aI}$)	$= 0,00237$)
Mittelwert	$\eta_a = 0,419065$,

ferner ergab sich
und

$$\eta_b = 0,4405$$

$$\eta_c = 0,4329.$$

1) G. R. Kirchhoff, Mechanik. S. 131.

2) R. Fellingner, Wied. Ann. 7. S. 342. 1902.

Hieraus ergeben sich die Dielektrizitätskonstanten für den farblosen Topas:

$$\epsilon_a = 6,2611, \quad \epsilon_b = 6,5357, \quad \epsilon_c = 6,4412,$$

W. Schmidt¹⁾ fand an einem Topas, den er als „durchsichtig, weingelb, mit vielen kleinen Sprüngen“ beschreibt, die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_a = \frac{6,65 - 6,72}{6,68}, \quad \epsilon_b = \frac{6,70 - 6,72}{6,71}, \quad \epsilon_c = \frac{6,30 - 6,25}{6,28}.$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten und den von mir gefundenen ist einerseits auf die verschiedenen, verwendeten Wellenlängen (bei Schmidt $\lambda = 75$, bei mir $\lambda = \infty$) und andererseits wohl auch auf die Verschiedenheit des untersuchten Materials zurückzuführen. Es erscheint verständlich, daß ein gelber Topas mit vielen kleinen Sprüngen sich dielektrisch anders verhält, als ein farbloses, fehlerfreies Exemplar, wie ich es zu verwenden Gelegenheit hatte.

Immerhin ist es auffallend, daß bei Schmidt ϵ_a größer ist als ϵ_c , während sich bei mir ϵ_a kleiner als ϵ_c ergab. — Wenn man annimmt, daß die in dem von Schmidt untersuchten Topas vorhandenen Sprünge, die sicher in der Ebene der Spaltbarkeit {001} verliefen, etwa H_2O enthielten, so würde das eine naheliegende Erklärung für das Schmidtsche Resultat $\epsilon_a > \epsilon_c$ bieten.

Bei dem ebenfalls von Schmidt¹⁾ und mir²⁾ früher untersuchten Baryt (wie der Topas: rhombisch bipyrr. und opt. +) zeigte sich übereinstimmend $\epsilon_a < \epsilon_c$, nämlich:

$$\text{Schmidt: } \epsilon_a = 7,62, \quad \epsilon_b = 12,25, \quad \epsilon_c = 7,63,$$

$$\text{Fellinger: } \epsilon_a = 6,97, \quad \epsilon_b = 10,087, \quad \epsilon_c = 6,99.$$

Die Dielektrizitätskonstante in der Richtung der optischen Normalen, ϵ_b , ist von Schmidt und mir übereinstimmend größer als ϵ_a und ϵ_c gefunden worden.

1) W. Schmidt, Wied. Ann. 9. S. 919—937. 1902.

2) R. Fellinger, Wied. Ann. 7. S. 352 u. 355. 1902.

Beryll (Aquamarin), von Madagaskar.

Dihexagonal bipyramidal (Groth). — Hexagonal holoëdrisch (Voigt)
Doppelbrechung negativ.

Das zur Untersuchung verwendete, kreisrunde Scheibchen von etwa 11 mm Durchmesser und 1,5 mm Dicke war von Dr. Steeg u. Reuter, Homburg geliefert.

Die Farbe der Scheibe konnte mit hellgrünlichblau, also aquamarinfarben, bezeichnet werden; trotz der Zartheit der Farbe war der Dichroismus im auffallenden Licht deutlich wahrnehmbar.

Da die Beryllscheibe, ebenso wie jedes der folgenden, einachsigen Kristallpräparate, gemäß meiner Angabe parallel zur optischen Achse geschliffen war, genügte sie in den zwei entsprechenden Aufhängungen zur Feststellung der beiden gesuchten Dielektrizitätskonstanten in den Richtungen \parallel und \perp zur optischen Achse.

Die Konstanten der Beryllscheibe und die Meßresultate sind folgende:

Dicke . . .	1,64 mm,	$A = 10,07$
Durchmesser	10,85 mm,	$B = 1,24876$
Gewicht . .	0,4062 g.	

Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich aus einer Reihe verlässlicher Messungen:

$$s_{\perp} = 142,5 \text{ mm}, \quad s_{\parallel} = 122 \text{ mm},$$

die Ausschlagswinkel:

$$\delta_{\perp} = 1^{\circ} 22' 58'', \quad \delta_{\parallel} = 1^{\circ} 11' 3''.$$

Hieraus ergaben sich nach den bekannten Formeln¹⁾ die Elektrizitätszahlen: $\eta_{\perp} = 0,4793$ und $\eta_{\parallel} = 0,40395$, und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_{\perp} = 7,023, \quad \epsilon_{\parallel} = 6,076.$$

Nach anderen Beobachtungen sind folgende Werte gefunden worden:

W. Schmidt ²⁾	$\epsilon_{\perp} = 6,05,$	$\epsilon_{\parallel} = 5,51,$
J. Curie ³⁾	$\epsilon_{\perp} = 7,10,$	$\epsilon = 6,05$ (für $\lambda = \infty$),
J. Curie ³⁾	$= 7,58,$	$= 6,24$ (für $\lambda = 75$).

1) R. Fellingner, Wied. Ann. 7. S. 344. 1902.

2) W. Schmidt, Wied. Ann. 9. S. 919—937. 1902.

3) J. Curie, Ann. d. Chim. 6. Ser. 17. S. 385. 1889; 18. S. 203. 1889.

Starke¹⁾ fand die Werte $\varepsilon_{\perp} = 7,44$ und $\varepsilon_{\parallel} = 7,85$, wobei aber, wie schon W. Voigt²⁾ bemerkt, die optischen Richtungen verwechselt zu sein scheinen.

Die von mir gefundenen Werte stimmen am besten mit den von Curie für ∞ Wellenlänge festgestellten überein und entsprechen, ebenso wie diese und die Schmidtschen Werte, dem negativen Sinne der Doppelbrechung.

Rubin, von Siam.

Ditrigonal skalenoëdrisch (Groth). — Trigonal holoëdrisch (Voigt).
Doppelbrechung negativ.

Es stand ein von Dr. Steeg und Reuter, Homburg, mit vieler Mühe hergestelltes, parallel zur optischen Achse geschliffenes Rubinscheibchen von 5,5 mm Durchmesser und 0,55 mm Dicke zur Verfügung.

Die Farbe konnte, soweit sich dies an dem dünnen Scheibchen feststellen ließ, als ausgesprochene, helle Siamfarbe mit einem Stich ins Violette, bezeichnet werden. Das Scheibchen war gleichmäßig gefärbt. Das dichroskopische Bild zeigte sich deutlich: hell-karminrot und ganz hellbräunlichgelb.

Der einzige Fehler, der wahrgenommen werden konnte, war ein kleiner Sprung am Rande des Scheibchens, in der Form wie er aus nebenstehender Skizze, Fig. 6, in doppelter Größe ersichtlich ist.

Die Abmessungen des Rubinscheibchens, die oben nur roh angegeben waren, und die übrigen, notwendigen Konstanten sind folgende:



Fig. 6.

Dicke . . . 0,547 mm, $A = 10,827$
Durchmesser 5,504 mm, $B = 0,86982$
Gewicht . . 0,0525 g.

Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich aus mehreren Reihen verlässlicher Messungen:

$$s_{\perp} = 259 \text{ mm}, \quad s_{\parallel} = 230 \text{ mm},$$

die Ausschlagswinkel:

$$\delta_{\perp} = 2^{\circ} 30' 31'', \quad \delta_{\parallel} = 2^{\circ} 13' 45''.$$

1) H. Starke, Wied. Ann. 60. S. 641. 1897.

2) W. Voigt, „Lehrbuch der Kristallphysik“, S. 456. 1910.

Hieraus errechnen sich die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0,97612, \quad \eta_{\parallel} = 0,81837$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_{\perp} = 13,2663, \quad \epsilon_{\parallel} = 11,284.$$

Vergleichswerte anderer Beobachter liegen meines Wissens noch nicht vor. Mit dem negativen Sinne der Doppelbrechung des Rubins stimmen die Zahlen für die Dielektrizitätskonstante überein.

Synthetischer Rubin.

Von der Deutschen Edelstein-Gesellschaft, vorm. Herm. Wild, A.-G. Idar.

Der synthetisch hergestellte Rohstoff war ein prächtig rotes, durchsichtiges Stück in der bei synthetischen Rohedsteinen üblichen Tropfenform, im Gewichte von 10,69 g.

Aus diesem Tropfen ließ ich durch Dr. Steeg und Reuter zwei kreisrunde Scheibchen herstellen, für welche zusammen 6,4 g verschliffen wurden.

Das eine Scheibchen sollte in den Dimensionen möglichst genau dem Scheibchen aus echtem Rubin, das andere dem aus synthetischem farblosen Saphir hergestellten entsprechen.

Die Abmessungen und Volumkonstanten der beiden Scheibchen sind folgende:

	Scheibe Nr. 1	Scheibe Nr. 2
Dicke mm	1,54	0,540
Durchmesser mm	10,87	5,529
Gewicht g	0,5701	0,0525
A	10,201647	10,8535
B	1,18232	0,8565

Diese synthetischen Rubinscheibchen waren in der Farbe wesentlich kräftiger als das Scheibchen aus echtem Rubin. Die dichroskopischen Bilder präsentierten sich dementsprechend viel ausgeprägter und zwar: karminrot und hellbräunlichgelbrosa.

Das größere Scheibchen (Nr. 1) war in der Farbe nicht ganz gleichmäßig; namentlich machte sich ein bogenförmig verlaufendes, helleres Band bemerkbar.

Zunächst sollen die Messungen mit Scheibchen Nr. 2, das in den Abmessungen dem echten Rubinscheibchen entspricht,

betrachtet werden. Die Messungen sind bei diesen beiden Scheibchen unter genau gleichen Verhältnissen ausgeführt worden. Die Ausschläge ergaben sich:

$$\begin{aligned}s_{\perp} &= 262 \text{ mm}, & s_{\parallel} &= 230 \text{ mm}, \\ \delta_{\perp} &= 2^{\circ} 32' 15'', & \delta_{\parallel} &= 2^{\circ} 12' 0,5''.\end{aligned}$$

Hieraus ergaben sich die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0,9858, \quad \eta_{\parallel} = 0,7989$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_{\perp} = 13,3877, \quad \epsilon_{\parallel} = 11,0393.$$

Für den echten Rubin hatten wir gefunden:

$$\epsilon_{\perp} = 13,2663 \quad \epsilon_{\parallel} = 11,284.$$

Diese deutlich ausgeprägte Übereinstimmung hatte ich nicht erwartet. Allerdings ist beim synthetischen Rubin der Unterschied, $\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel} = 2,3484$, größer als beim echten, bei dem sich $\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel} = 1,9823$ ergibt.

Auch die synthetische Rubinscheibe Nr. 1, deren Messungen mit einem anderen Aufhängefaden vorgenommen wurden (die Messungen fanden mehrere Monate vor denjenigen der Scheibe Nr. 2 statt), brachte Vergleichsresultate, die mit denen der Scheibe Nr. 2 gut übereinstimmen. — Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich:

$$s_{\perp} = 184 \text{ mm}, \quad s_{\parallel} = 162 \text{ mm},$$

die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0,98515, \quad \eta_{\parallel} = 0,79838$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_{\perp} = 13,38 \quad \epsilon_{\parallel} = 11,033, \quad \epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel} = 2,347.$$

Als Mittelwerte für die Dielektrizitätskonstanten des synthetischen Rubins aus den Resultaten der beiden Scheibchen Nr. 1 und Nr. 2 kann man annehmen:

$$\epsilon_{\perp} = 13,3838, \quad \epsilon_{\parallel} = 11,0361.$$

Vergleichswerte für die Dielektrizitätskonstante synthetischer Rubine liegen meines Wissens noch nicht vor.

Saphir, farblos, von Ceylon.
Kristallographisch wie Rubin.

Von der Edelsteintirma C. W. Kessler, Idar, wurde ein Rohsaphir im Gewichte von 3 g geliefert, aus dem Dr. Steeg und Reuter ein Scheibchen parallel zur optischen Achse herstellten. Der Schliff war nicht so vollkommen wie bei den übrigen Präparaten.

Die Messungen boten nichts wesentlich Interessantes. Die Resultate sind folgende:

Dicke . . .	1,10 mm	$A = 10,764$
Durchmesser	10,63 mm	$B = 0,9021$
Gewicht . .	0,3854 g.	

Die Ausschläge und Ausschlagswinkel ergaben sich:

$$\begin{aligned}s_{\perp} &= 179 \text{ mm}, & s_{\parallel} &= 161,2 \text{ mm}, \\ \delta_{\perp} &= 1^{\circ} 44' 10'', & \delta_{\parallel} &= 1^{\circ} 33' 50''.\end{aligned}$$

Die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0,96975, \quad \eta_{\parallel} = 0,82906$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_{\perp} = 13,186, \quad \varepsilon_{\parallel} = 11,418.$$

Man sieht ziemlich Übereinstimmung mit den für den echten Rubin gefundenen Werten; nur ist beim farblosen Saphir der Unterschied, $\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel} = 1,768$, kleiner als beim Rubin.

Synthetischer Saphir, farblos.

Von der Deutschen Edelstein-Gesellschaft, vorm. Herm. Wild, A.-G., Idar.

Wie beim synthetischen Rubin wurde ein Kristalltropfen geliefert, im Gewichte von 8,4 g, aus welchem eine Scheibe parallel zur optischen Achse geschliffen wurde. Verschliffen wurden 4,5 g.

Die Dimensionen und Meßresultate dieser Scheibe waren folgende:

Dicke . . .	1,59 mm	$A = 10,332$
Durchmesser	12,00 mm	$B = 1,117$
Gewicht . .	0,6791 g.	

Die Ausschläge und Winkel:

$$\begin{aligned}s_{\perp} &= 181 \text{ mm}, & s_{\parallel} &= 163 \text{ mm} \\ \delta_{\perp} &= 1^{\circ} 45' 20'', & \delta_{\parallel} &= 1^{\circ} 34' 53''.\end{aligned}$$

Die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0,9409, \quad \eta_{\parallel} = 0,7981$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\epsilon_{\perp} = 12,80, \quad \epsilon_{\parallel} = 11,029.$$

Diese Werte sind niedriger als beim echten, farblosen Saphir, und überhaupt die niedrigsten aus der ganzen Korunduntersuchungsreihe.

Der Unterschied $\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel} = 1,771$ stimmt wohl zufällig mit der beim echten Saphir gefundenen Zahl 1,768 merkwürdig überein, weicht aber um so mehr von dem entsprechenden Werte des synthetischen Rubins, 2,348, ab.

Das Ergebnis der an natürlichen und synthetischen Edelkorunden angestellten Untersuchungen läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die Dielektrizitätskonstante für den natürlichen edlen Korund zeigt in der Richtung parallel und senkrecht zur optischen Achse deutliche Verschiedenheit, die dem Sinne der negativen Doppelbrechung entspricht.

2. Die Dielektrizitätskonstanten für echten Rubin und farblosen Saphir sind voneinander nicht wesentlich verschieden und liegen in der Größenordnung: \perp zur optischen Achse 13 und \parallel zur optischen Achse 11.

3. Die Dielektrizitätskonstante synthetischer Korunde unterscheidet sich von derjenigen echter Korunde nicht wesentlich und nicht charakteristisch; höchstens ist zu bemerken, daß in der Richtung \parallel zur optischen Achse die Dielektrizitätskonstante bei den synthetischen Kristallen durchweg niedriger gefunden wurde als bei den echten.

4. Der Unterschied zwischen den Dielektrizitätskonstanten \perp und \parallel zur optischen Achse ist bei echten und synthetischen Korunden desto größer, je kräftiger gefärbt diese sind.

Als Anhang möchte ich noch etwas über einen nicht zu den Edelsteinen gehörigen Körper mitteilen, den Bernstein, dessen dielektrisches Verhalten ich mit derselben Apparatur, wie sie für die besprochenen Kristalle verwendet wurde, untersucht habe.

Daß ich den Bernstein in die vorliegenden Untersuchungen mit einbezog, hat seinen Grund darin, daß es schon lange meine Absicht gewesen war, Bernstein verschiedener Qualität und von verschiedenen Fundorten auf sein dielektrisches Verhalten zu untersuchen. Ich hatte mir auch schon sechs in der Form möglichst gleiche Präparate aus Bernsteinen verschiedener Qualität von der Ostsee und der Nordsee (Bernstein von Sizilien, Rumänien, Birma usw. sollte folgen) herstellen lassen, war aber nicht über die Bestimmung der spezifischen Gewichte hinausgekommen.

Die einzige, durchgeführte Untersuchung im homogenen elektrischen Feld sei hier mitgeteilt.

Bernstein, gelbklar, Nordsee.

Das Rohmaterial, angeblich von der jütländischen Nordseeküste (vermutlich von Fanö) stammend, wurde von Richard Parthum, Berlin, geliefert, welcher auch die Herstellung der erforderlichen zylindrischen Scheibe in bester Ausführung besorgte.

Es war eine Scheibe von 17,4 mm Durchmesser und 1,74 mm Dicke, im Gewicht von 0,423 g.

Entsprechend den größeren Dimensionen dieser Scheibe mußte der Abstand der Kondensatorplatten, der bei den Kristallscheibchen 18—20 mm gewesen war, auf 40 mm bemessen werden. Im übrigen blieb die Versuchsanordnung (Meßspannung 142 Volt, Skalenabstand 295 cm usw.) genau dieselbe wie vorher.

Selbstverständlich mußten beim Bernstein, als dem typischen Vertreter der Reibungselektrizität, dieselben Vorsichtsmaßregeln beobachtet werden, wie vorher beim Topas (dieser wird durch Reiben positiv elektrisch, der Bernstein bekanntlich negativ elektrisch).

Erst etwa 5 Tage nach dem Einhängen des Bernsteinscheibchens konnten mit diesem verlässliche, gleichmäßige Ausschläge erzielt werden. Es wurden über 300 Messungen gemacht.

Die Konstanten und Endresultate gestalteten sich wie folgt:

$$A = 9,3817, \quad B = 1,595.$$

Die Elektrisierungszahl: $\eta = 0,14827$ und die Dielektrizitätskonstante: $\epsilon = 2,863$.

Als Vergleichswert ist mir nur der von Prof. W. M. Thornton¹⁾ gefundene: $\epsilon = 2,8$, gegenwärtig, der mit meinem Resultat annähernd übereinstimmt.

Zum Schluß seien die in vorliegender Arbeit gefundenen Werte für die Dielektrizitätskonstanten nochmals übersichtlich zusammengestellt:

Topas, farblos, von Mino, Japan	$\epsilon_a = 6,2512$, $\epsilon_b = 6,5357$, $\epsilon_c = 6,4412$,
Beryll (Aquamarin), von Madagaskar	$\epsilon_{\perp} = 7,023$, $\epsilon_{\parallel} = 6,076$,
Rubin, von Siam	$\epsilon_{\perp} = 13,2663$, $\epsilon_{\parallel} = 11,284$,
Saphir, farblos, von Ceylon	$\epsilon_{\perp} = 13,186$, $\epsilon_{\parallel} = 11,418$,
Synthetischer Rubin	$\epsilon_{\perp} = 13,3838$, $\epsilon_{\parallel} = 11,0361$,
Synthetischer Saphir, farblos	$\epsilon_{\perp} = 12,80$, $\epsilon_{\parallel} = 11,029$,
Bernstein, gelbklar, Nordsee	$\epsilon = 2,863$.

1) W. M. Thornton, *Phil. Mag.* Vol. XIX. Sixth-Ser. S. 407. 1910.

(Eingegangen 10. Juni 1919.)

**4. Der spektrale Nachweis elektrischer Felder
an der Oberfläche chemischer Atome;
von J. Stark.**

1. Einleitung.

Der Zeemaneffekt hat den Nachweis magnetischer Felder in der Atmosphäre der Sonne ermöglicht; dagegen ist der Versuch Humphreys¹⁾ mißglückt, mit seiner Hilfe auch das Vorkommen magnetischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome nachzuweisen, nämlich auf deren Wirkung die Verschiebung und Verbreiterung von Spektrallinien durch Druckerhöhung zurückzuführen.

Umgekehrt liegt der Fall bei dem Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. Während er bis jetzt vergeblich an Spektrallinien der Sonne gesucht wurde, bringt er uns in zwei Erscheinungen Kunde von dem Vorhandensein elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome. Die eine dieser Erscheinungen ist die Verbreiterung und Verschiebung von Serienlinien durch Vergrößerung des Gasdruckes und der Stromdichte, die andere das Erscheinen gewisser Serien unter der Wirkung elektrischer Felder.

Die führende Ursache derjenigen Verbreiterung von Serienlinien, welche die Vergrößerung des Gasdruckes und der Stromdichte begleitet, habe ich schon frühzeitig²⁾ in der Wirkung elektrischer Felder an der Oberfläche von Gasmolekülen und somit an der Oberfläche chemischer Atome (Atomionen) vermutet. Diese Vermutung ist zunächst in qualitativer Hinsicht durch Beobachtungen³⁾ von mir und meinen Mitarbeitern von

1) W. J. Humphreys, Jahrb. d. Rad. u. El. 5. S. 324. 1908.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 43. S. 1040. 1914.

3) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. S. 1040. 1914; G. Wendt, Ann. d. Phys. 45. S. 1257. 1914; J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 226. 1915; A. J. Dempster, Ann. d. Phys. 47. S. 791. 1915; T. R. Merton,

A. J. Dempster und T. R. Merton, für die rote Wasserstofflinie auch in quantitativer Hinsicht von J. W. Nicholson und T. R. Merton bestätigt worden. P. Debye¹⁾ und vor allem J. Holtsmark²⁾ hat eine Theorie der Verbreiterung von Serienlinien durch molelektrische Felder (elektrische Felder an der Oberfläche von Gasmolekülen) entwickelt und in einer Besprechung des in Betracht kommenden experimentellen Materiales eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gefunden. Die Frage nach dem Verhältnis zwischen molelektrischer und molstößlicher Verbreiterung, die ich in einem Bericht³⁾ über die Verbreiterung von Spektrallinien aufgeworfen habe, ist freilich noch nicht beantwortet.

Daß auch die Verschiebung des Intensitätsgipfels von Spektrallinien, welche die dissymmetrische Verbreiterung begleitet, eine Wirkung der molelektrischen Felder ist, hat kürzlich M. Ritter⁴⁾ nachgewiesen.

Weniger geklärt und bekannt ist die Erscheinung, daß unter der Wirkung molelektrischer Felder gewisse Serien sichtbar werden, welche außerhalb eines elektrischen Feldes keine merkliche Intensität besitzen. Es ist ja eine der merkwürdigsten Wirkungen des elektrischen Feldes auf Spektrallinien⁵⁾, daß die Intensität gewisser Serien eines Elements im Verhältnis zu derjenigen anderer Serien außerhalb eines elektrischen Feldes unmerklich klein ist, dagegen in einem elektrischen Felde mit dessen wachsender Stärke rasch größer wird und diejenige anderer Serien erreicht. Für Spektren, in welchen solche Serien vorkommen, ist demnach die Verteilung der Intensität innerhalb dieser Serien sowie zwischen ihnen und anderen Serien merk-

Proc. Roy. Soc. 92. S. 322. 1916; J. W. Nicholson u. T. R. Merton, Phil. Trans. A. 216. S. 459. 1916; T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918; M. Ritter, Ann. d. Phys. 59. S. 170. 1919.

1) P. Debye, Phys. Zeitschr. 20. S. 160. 1919.

2) J. Holtsmark, Phys. Zeitschr. 20. S. 162. 1919; Ann. d. Phys. 58. S. 577. 1919.

3) J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. 12. S. 349. 1915.

4) M. Ritter, Ann. d. Phys. 59. S. 170. 1919.

5) Li-Serie: J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 210. 1915. He-Serien: J. Koch, Ann. d. Phys. 48. S. 98. 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. 56. S. 577. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 589, 610. 1918.

würdiger Weise von der Stärke der elektrischen Felder abhängig, in denen sich die Serienträger befinden.

Diese Wirkung ist zunächst an ausgedehnten oder „endlichen“ elektrischen Feldern beobachtet worden. Es ist aber zu erwarten, daß sie auch von den elementaren elektrischen Feldern einzelner Gasmoleküle hervorgebracht wird, wenn sich in ihnen die Träger von Serien jener Art befinden. Diese Überlegung habe ich bereits auf die halbscharfe (dritte) Nebenserie des Lithiums angewandt und deren Auftreten im Lichtbogen in freier Luft auf die Wirkung molelektrischer Felder zurückgeführt.¹⁾

Im folgenden sind weitere Beispiele für diesen Nachweis des Vorkommens elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome an der Hand des Auftretens von Serien unter der Wirkung dieser Felder gegeben. Die nachstehenden Ausführungen sind auch insofern von Bedeutung als sie unsere Kenntnisse von den Serien des Heliums und Lithiums vervollständigen.

2. Die halbscharfe Nebenserie des Lithiums und Heliums.

Die halbscharfe oder dritte Nebenserie des Lithiums (λ 6240 — 4636 — 4147 — 3923) gehört zu den Serien, welche nur im elektrischen Feld erscheinen. Ihr Auftreten in einem endlichen elektrischen Feld ist von mir untersucht²⁾ worden, schon früher war sie am Lichtbogen in freier Luft, also bei hohem Gasdruck und großer Stromdichte beobachtet worden. Hier wird sie, wie ich bereits oben bemerkte, durch die Wirkung molelektrischer Felder bedingt.

Die entsprechende halbscharfe oder dritte Nebenserie des Heliums (He_1) ist von J. Koch³⁾ in einem endlichen elektrischen Feld aufgefunden worden. Bei kleiner Stromdichte und niedrigem Gasdruck sind die Linien dieser Serie noch photographisch unsichtbar, wenn die Linien der diffusen und der scharfen Nebenserie bereits stark überlichtet sind. Jedoch sind sie (λ 4519 — 4046) von T. R. Merton⁴⁾ kürzlich unter denjenigen Bedingungen,

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 226. 1915.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 210. 1915.

3) J. Koch, Ann. d. Phys. 48. S. 98. 1915.

4) T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918.

welche die Serienträger in starke molelektrische Felder bringen, nämlich bei erheblichem Gasdruck und großer Stromdichte an der positiven Säule in einer Geißleröhre neben den übrigen He-Linien in merklicher Intensität beobachtet worden.

3. Die nahdiffuse Nebenserie des Lithiums und Heliums.

Wie ich kürzlich darlegte¹⁾, gehört vermutlich auch die nahdiffuse Nebenserie zu denjenigen Serien, welche durch ein elektrisches Feld eine Verstärkung ihrer Intensität erfahren. Die Linien der nahdiffusen Nebenserie des Lithiums liegen dicht hinter denjenigen der diffusen Nebenserie. Das gleiche gilt für die nahdiffuse Nebenserie von He.

Die Linien der nahdiffusen Li- und He₁-Nebenserie werden durch das elektrische Feld nach kürzeren Wellen verschoben. Infolge ihrer großen Nähe bei den diffusen Linien habe ich sie früher irrtümlich als elektrische Komponenten dieser Linien betrachtet und somit von einem Verhältnis der Intensitäten der elektrischen Komponenten der diffusen Linien in Abhängigkeit von der Feldstärke²⁾ gesprochen. In Wirklichkeit handelte es sich um das Verhältnis der Intensitäten zweier verschiedener Serien.

Daß diese Auffassung richtig ist, geht aus folgenden Beobachtungen und Überlegungen hervor.

Von der nahdiffusen Li-Nebenserie ist am Lichtbogen in freier Luft die Linie $\lambda 4601,6$, am Funken in freier Luft die Linie $\lambda 4131$ von F. Exner u. E. Haschek³⁾ beobachtet worden, also beide Linien unter den Bedingungen für starke molelektrische Felder (hoher Gasdruck und große Stromdichte). Diese Wellenlängen gelten, wie man beachten muß, für die Feldstärke des Intensitätsgipfels einer jeden Linie. Da diese durch das elektrische Feld nach kürzeren Wellenlängen verschoben wird, so ist die Wellenlänge der Linien für die Feldstärke Null merklich größer. So berechnet sich aus den von B. Dunz⁴⁾ ge-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 58. S. 721. 1919.

2) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. S. 999. 1914; H. Lüsslem, Ann. d. Phys. 49. S. 876. 1916.

3) F. Exner u. E. Haschek, Wellenlängen-Tabellen, Leipzig u. Wien 1902.

4) B. Dunz, Diss. Tübingen 1911.

gebenen Zahlen die Wellenlänge der zweiten Linie zu 4132,2 für die Feldstärke Null (Wellenlänge der benachbarten diffusen Linie 4132,6).

Die Linien λ 4471 und 4026 der nahdiffusen He_I -Serie sind zunächst von mir und Kirschbaum im endlichen elektrischen Feld als scheinbare Komponenten der benachbarten diffusen Linien λ 4471,6 und 4026,3 beobachtet worden; ihre Intensität nimmt im Verhältnis zu derjenigen der diffusen- und scharfen He_I -Linien rasch mit wachsender Feldstärke zu. Nun hat kürzlich T. R. Merton¹⁾, wie bereits oben bemerkt wurde, an einer Geißleröhre die Bedingungen für die Wirkung molekularer Felder auf Serienlinien (erheblicher Gasdruck und große Stromdichte) hergestellt und hat außer den ebenfalls unter dieser Wirkung erscheinenden halbscharfen He_I -Serienlinien dicht hinter 4471,6 eine neue Linie beobachtet. Es ist dies zweifellos die nahdiffuse He_I -Linie 4471 und nicht, wie Merton meint, eine Komponente in der Verbreiterung der diffusen Linie 4471,6.

Außer dieser nahdiffusen He_I -Linie hat Merton, wie nebenbei bemerkt sei, auch noch die nahdiffusen He_{II} -Linien hinter den diffusen He_{II} -Linien λ 4922 und 4388 unter der Wirkung der molekularer Felder erhalten, sie aber in unzutreffender Weise für Verbreiterungskomponenten dieser Linien erklärt.

Greifswald, Physik. Inst. d. Univ., 20. Mai 1919.

1) T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

ur.
für
en
rie
k-
en
re
nd
un
e,
ol-
ad
er
ht
ol-
nt,
ö.
n-
er
ag
er